Nombres et transformations complexes

Exercice 1 Linéariser $\cos^3 x$ et $\sin^4 x$ puis calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \cos^3(\pi t)\,dt$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \sin^4(\pi t)\,dt$.

Exercice 2 Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^3 + (1-5j)z^2 - 2(5+j)z + 8j$.

1. Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution qui est un nombre imaginaire pur que l'on déterminera.
2. En déduire que $f(z)$ peut s'écrire sous la forme $f(z) = (z-2j)(z^2+az+b)$ où a et b sont deux complexes à déterminer.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

Exercice 3 *(D'après BTS)* On considère le polynôme

$$P(z) = z^4 + (-4-4j)z^3 + (-6+20j)z^2 + (28+32j)z + 32 - 48j\,.$$

1. Calculer $P(-2)$. En déduire une factorisation de $P(z)$ sous la forme : $(z+2)Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme complexe.
2. Démontrer que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on calculera.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'quation $P(z) = 0$.
   Calculer les modules des quatre solutions z_0, z_1, z_2 et z_3. On notera z_0 la solution de plus petit module.
4. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal, représenter les points M_1, M_2, M_3 et M_0 d'affixes respectives -2, $4j$, $5-j$ et $1+j$.
   Montrer que $M1M2M3$ est un triangle isocèle dont le centre de gravité est M_0.

Exercice 4 Soit $a = 2\left(1 + e^{j\frac{\pi}{6}}\right)$, $b = 2\left(1 + e^{-j\frac{\pi}{6}}\right)$, et $c = 1 - j\sqrt{3}$.

1. Ecrire a et b sous forme algébrique.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$; A, B et C sont les points d'affixes a, b, et c.
   Donner le module et un argument de $a-2$, $b-2$ et $c-2$.
   En déduire que A, B et C sont sur un même cercle que l'on déterminera.
3. A', B' et C' sont les points d'affixe $a-2$, $b-2$ et $c-2$.
   Par quelle transformation passe-t-on de A' à A, de B' à B et de C' à C ?
4. Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ et donner son rayon.

Exercice 5 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$.
   On appellera a la solution dont la partie imaginaire est négative, et b l'autre solution.
2. Soit R la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = ze^{j\frac{\pi}{3}}$. Quelle est cette transformation ?
3. Soit A le point d'affixe a, et B celui d'affixe b.
   Calculer l'affixe de A' image de A par R et de B' image de B par R.
   Placer A et B, et construire A' et B'.
4. Soit C le point d'affixe -1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

On considère la fonction de transfert T de la pulsation ω définie sur $]0;+\infty[$ par

$$T(\omega)=\frac{K}{R+j\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)}$$

K est une constante complexe. R, L et C sont des constantes réelles strictement positives. La pulsation ω est exprimée en radian/seconde.

On pose $h(\omega)=\dfrac{1}{R}\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)$, avec $\omega\in]0;+\infty[$. Dans ces conditions, $T(\omega)=\dfrac{K}{R}\dfrac{1}{1+jh(\omega)}$.

1. Etudier les variations de h. Déterminer en fonction de R et C la valeur de ω qui annule h.
2. On se propose d'étudier l'ensemble (E) du plan complexe, décrit par le point d'affixe $T(\omega)$ quand ω parcourt $]0;+\infty[$.

   a) Représenter dans le plan complexe l'ensemble Δ des points d'affixe $1+jh(\omega)$.

   b) En utilisant les propriétés de l'inversion complexe, en déduire l'ensemble Γ des points d'affixe $\dfrac{1}{1+jh(\omega)}$.

   c) Préciser la nature de l'ensemble (E).
3. Application numérique :

   a) Avec les données numériques précisées ci-dessous, représenter graphiquement l'ensemble (E) lorsque $\alpha=0$ et colorier la partie de (E) correspondant à des fréquences comprises entre 80Hz et 100Hz.

   b) A l'aide de ces résultats traiter le cas $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

   Données numériques : $L=0,1$; $C=10^{-4}$; $R=50$; $K=220e^{\alpha j}$.

Exercice 7 *(D'après BTS)*

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Soit f l'application qui à tout point m du plan P d'affixe z ($z\neq-1$) associe le point M d'affixe $Z=\dfrac{z}{1+z}=1-\dfrac{1}{1+z}$.

1. Déterminer l'ensemble D des points d'affixe $-\dfrac{3}{2}+jy$, ($y\in\mathbb{R}$).
2. Soit $z_1=z+1$. Préciser la transformation géométrique t_1 qui associe à un point m d'affixe z, le point M_1 d'affixe z_1.

   Quelle est l'image, notée D_1 de D par la transformation t_1 ?
3. Soit t_2 la transformation géométrique qui à tout point d'affixe z ($z\neq0$), associe le point M_2 d'affixe $z_2=\dfrac{1}{z}$.

   Préciser la nature de t_2. Quelle est l'image, notée Γ_2, de D_1 par la transformation t_2 ?
4. Soit t_3 la transformation géométrique qui au point d'affixe z, associe lepoint M_3 d'affixe $z_3=-z$. Préciser la nature de t_3. Quelle est l'image, notée Γ_3, de Γ_2 par la transformation t_3 ?
5. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe $Z=1-\dfrac{1}{1+z}$ lorsque $z=-\dfrac{3}{2}+jy$, ($y\in\mathbb{R}$).
6. Représenter sur une même figure les ensembles successifs obtenus.