Exercice 1 *Session 2004* **8 points**

Une entreprise fabrique des pièces. Ces pièces sont considérées comme conformes si leur longueur est comprise entre $79,8$ mm et $80,2$ mm.

1. La probabilité qu'une pièce soit conforme est :

$$\begin{aligned} P\left(79,8 \leqslant L \leqslant 80,2\right) &= P\left(\frac{79,8-80}{0,0948} \leqslant \frac{L-80}{0,0948} \leqslant \frac{80,2-80}{0,0948}\right) = P\left(-2,11 \leqslant \frac{L-80}{0,0948} \leqslant 2,11\right) \\ &= \Pi(2,11) - \Pi(-2,11) = 2\Pi(2,11) - 1 \simeq 2 \times 0,9826 - 1 = 0,9652 \end{aligned}$$

2. On admet que si on prélève, au hasard, une pièce dans la production, la probabilité que cette pièce ne soit pas conforme, est $p = 0,035$.
   (a) On répète $n = 100$ tirages successifs d'une pièce et la variable aléatoire X compte le nombre de pièces défectueuses. La probabilité qu'à un tirage la pièce soit défectueuse est $p = 0,035$. Ces tirages sont donc des expériences de Bernoulli, dont le succès est que la pièce soit défectueuse.
   De plus ces tirages sont identiques (car on assimile les tirages à des tirages avec remise) et indépendants entre eux.
   La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,035$.
   (b) $P(A) = P(X=2) = C_{100}^{2} p^2 (1-p)^{98} = \dfrac{100 \times 99}{2} \times 0,035^2 \times 0,965^{98} \simeq 0,1847$
   $P(B) = P(X \geqslant 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - (0,0284 + 0,1029) = 0,869$
   (c) Le client refuse le lot avec la probabilité :
   $$P(X > 4) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)) = 0,273$$
   (d) En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer la plus petite valeur entière n telle que :
   $$P(X > n) < 0,03$$
   $$P(X > n) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=n))$$
   On a :
   $$P(X > 6) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=6)) = 0,0618 > 0,03$$
   et
   $$P(X > 7) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=7)) = 0,0243 < 0,03$$
   ainsi, la plus petite valeur de n est $n = 7$.

3. On doit avoir,
$$P\left(79,8 \leqslant L_1 \leqslant 80,2\right) = 0,99 \iff P\left(\frac{79,8-80}{\sigma'} \leqslant \frac{L_1-80}{\sigma'} \leqslant \frac{80,2-80}{\sigma'}\right) = 0,99$$
soit, $2\Pi\left(\dfrac{0,2}{\sigma'}\right) - 1 = 0,99 \iff \Pi\left(\dfrac{0,2}{\sigma'}\right) = \dfrac{1+0,99}{2} = 0,995$
Or, d'après la table de la loi normale centrée réduite, $\Pi(t) = 0,995 \iff t \simeq 2,575$, d'où, $\dfrac{0,2}{\sigma'} = 2,575 \iff \sigma' = \dfrac{0,2}{2,575} \simeq 0,078$.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

f est la fonction périodique de période 1, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1[$ par $f(t) = \alpha t + \beta$.

1. $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt = \int_0^1 (\alpha t + \beta)\ dt = \left[\alpha\frac{t^2}{2} + \beta t\right]_0^1 = \frac{\alpha}{2} + \beta$

2. On a $T = 1$, donc la pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi$, et :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt = 2\int_0^1 (\alpha t + \beta)\sin(2\pi n t)\,dt \\ &= 2\alpha\int_0^1 t\sin(2\pi n t)\,dt + 2\beta\int_0^1 \sin(2\pi n t)\,dt \end{aligned}$$

On intègre par parties la première intégrale, avec $\left\{\begin{array}{l} u = t \\ v' = \sin(2\pi n t) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u' = 1 \\ v = -\dfrac{1}{2\pi n}\cos(2\pi n t) \end{array}\right.$

soit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t\sin(2\pi n t)\,dt &= \left[-\frac{t}{2\pi n}\cos(2\pi n t)\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2\pi n}\cos(2\pi n t)\,dt \\ &= -\frac{1}{2\pi n}\cos(2\pi n) + 0 + \frac{1}{2\pi n}\left[\frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi n t)\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2\pi n}\cos(2\pi n) + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\left(\sin(2\pi n) - \sin(0)\right) \end{aligned}$$

Or, pour tout entier n, $\cos(2\pi n) = \cos(0) = 1$ et $\sin(2\pi n) = \sin(0) = 0$, ainsi,

$$\int_0^1 t\sin(2\pi n t)\,dt = \frac{-1}{2\pi n}$$

De plus,

$$\int_0^1 \sin(2\pi n t)\,dt = \left[-\frac{1}{2\pi n}\cos(2\pi n t)\right]_0^1 = -\frac{1}{2\pi n}\left(\cos(2\pi n) - \cos(0)\right) = 0,\ \text{car}\ \cos(2\pi n) = \cos(0) = 1$$

Au total, on a donc :

$$b_n = 2\alpha\int_0^1 t\sin(2\pi n t)\,dt + 2\beta\int_0^1 \sin(2\pi n t)\,dt = 2\alpha\frac{-1}{2\pi n} + 2\beta\times 0 = -\frac{\alpha}{\pi n}$$

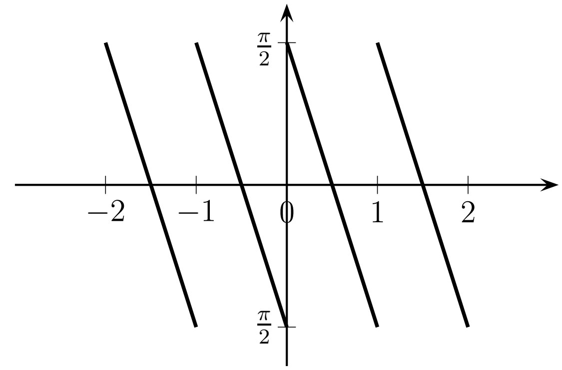
3. On se propose de déterminer les nombres réels α et β pour que le développement S en série de Fourier de la fonction f soit défini pour tout nombre réel t par $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(2n\pi t)$.

(a) $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ b_n = \dfrac{1}{n} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\alpha}{2} + \beta = 0 \\ -\dfrac{\alpha}{\pi n} = \dfrac{1}{n} \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} \beta = \dfrac{\pi}{2} \\ \alpha = -\pi \end{array}\right.$

On a alors, $f(t) = -\pi t + \dfrac{\pi}{2}$.

(b)



1. On calcule les dérivées première et deuxième de s_1 :

$$s_1'(t) = \frac{2\pi}{1-4\pi^2}\cos(2\pi t) + \frac{4\pi}{2(1-16\pi^2)}\cos(4\pi t)$$

$$s_1''(t) = -\frac{4\pi^2}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) - \frac{16\pi^2}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$$

On a alors,

$$\begin{aligned} s_1''(t) + s_1(t) &= -\frac{4\pi^2}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) - \frac{16\pi^2}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t) + \frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t) \\ &= \frac{1-4\pi^2}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) + \frac{1-16\pi^2}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t) \\ &= \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t) \end{aligned}$$

La fonction s_1 vérifie donc bien l'équation différentielle (E).

2. L'équation homogène associée est : $s''(t) + s(t) = 0$. Son équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm j$.
La solution générale de cette équation homogène est donc : $s_2(t) = A\sin(t) + B\cos(t)$, A et B étant deux constantes réelles quelconques.
La solution générale de l'équation différentielle est donc, $y(t) = s_1(t) + s_2(t)$

Exercice 3 **4 points**

Soit C la courbe d'équation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = (t+1)e^{-t} \\ y(t) = t^2 e^{-t} \end{cases}$

1. $\begin{cases} x'(t) = -te^{-t} \\ y'(t) = te^{-t}(2-t) \end{cases}$

2.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$x(t)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	$3e^{-2}$	$\searrow$	
$y(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	
$y'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Il y a deux points particuliers : en $t = 0$, $A(1;0)$.
En $t = 2$, $B(3e^{-2}; 4e^{-2})$, soit environ, $B(0,41; 0,54)$. De plus, $x'(2) \neq 0$ et $y'(2) = 0$: la tangente en B est horizontale.

4. La courbe C coupe l'axe des ordonnées au point I tel que $x(t) = 0 \iff (t+1)e^{-t} = 0 \iff t = -1$, et donc, $y(t) = y(-1) = e \simeq 2,78$.
Les coordonnées du point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées sont donc $I(0; e)$.

5.