Exercice 1 *Session 2004* **8 points**

Les questions 1, 2 *et* 3 *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

Une entreprise fabrique des pièces. Ces pièces sont considérées comme conformes si leur longueur est comprise entre $79,8$ mm et $80,2$ mm.

1. On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce fabriquée, associe sa longueur en mm.
   On admet que la variable L suit une loi normale de moyenne 80 et d'écart type $0,0948$.
   On prélève une pièce au hasard dans la production.
   Déterminer, en utilisant la table de la loi normale centrée réduite, la probabilité que cette pièce soit conforme.
2. On admet que si on prélève, au hasard, une pièce dans la production, la probabilité que cette pièce ne soit pas conforme, est $p = 0,035$.
   (a) On note X, la variable aléatoire représentant le nombre de pièces défectueuses dans un lot de 100 pièces. Les pièces sont prélevées au hasard et le tirage est assimilé à un tirage avec remise.
   Justifier que X suit une loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,035$.
   (b) Le tableau ci-dessous, donne la probabilité des évènements "$X = k$" pour k variant de 0 à 9, à l'exception de l'évènement "$X = 2$".

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = k)$	0,0284	0,1029		0,2188	0,1924	0,1340	0,0770	0,0375	0,0158	0,0059

   On considère les évènements :
   A : « le nombre de pièces défectueuses du lot est égal à 2 » ;
   B : « le nombre de pièces défectueuses du lot est au moins égal à 2 ».
   Calculer $P(A)$ au dix millième près, puis $P(B)$ au millième près.
   (c) Un lot de 100 pièces est envoyé à un client, le lot est accepté s'il contient au plus 4 pièces défectueuses.
   En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer au millième près, la probabilité que le client refuse ce lot.
   (d) En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer la plus petite valeur entière n telle que :
   $$P(X > n) < 0,03$$
3. L'entreprise souhaite améliorer la qualité de la production. Pour cela on projette de changer le processus de fabrication des pièces.
   On définit alors une nouvelle variable L_1 qui à chaque pièce à construire selon le nouveau processus associera sa longueur en mm.
   La variable aléatoire L_1 suit une loi normale de moyenne $m = 80$ et d'écart type σ'.
   Déterminer σ' pour que, en prenant une pièce au hasard dans la future production, la probabilité d'obtenir une pièce conforme soit égale à $0,99$.

Exercice 2 *Session 2006* **9 points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soient α et β deux nombres réels.
Soit f une fonction périodique de période 1, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1[$ par $f(t) = \alpha t + \beta$.
On appelle a_0, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à la fonction f.

2. Montrer que $b_n = -\dfrac{\alpha}{n\pi}$ pour tout nombre entier naturel n non nul.
   On admet que $a_n = 0$ pour tout entier naturel n non nul.
3. On se propose de déterminer les nombres réels α et β pour que le développement S en série de Fourier de la fonction f soit défini pour tout nombre réel t par $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin(2n\pi t)$.
   (a) Déterminer les nombres réels α et β tels que $a_0 = 0$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$.
   En déduire l'expression de la fonction f.
   (b) Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ dans un repère orthogonal.

Partie B

On veut résoudre l'équation différentielle :

$$s"(t) + s(t) = f(t)$$

On admet que l'on obtient une bonne approximation de la fonction s en remplaçant $f(t)$ par les premiers termes du développement en série de Fourier de la fonction f obtenus dans la partie A, c'est-à-dire par :

$$\sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t)$$

Soit (E) l'équation différentielle :

$$s"(t) + s(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t)$$

1. Vérifier que la fonction s_1 définie pour tout nombre réel t par :

$$s_1(t) = \frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$$

   est solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E).

Exercice 3 **4 points**

Soit C la courbe d'équation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = (t+1)e^{-t} \\ y(t) = t^2 e^{-t} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1. Calculer les fonctions dérivées x' et y' de x et y.
2. Dresser le tableau des variations conjointes de x et y.
3. Préciser les coordonnées du point A de la courbe de paramètre $t = 0$, et le point B de la courbe de paramètre $t = 2$.
   Préciser la tangente en B.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C avec l'axe des ordonnées.
5. Tracer la courbe C.