Formulaire de mathématiques autorisé.

Exercice 1 *BTS, Groupement A, 2003* **10 points**

Partie A :

1. Dans cette question, on s'intéresse au cas où $\tau = 0,01$.

   On a ici $\lambda = 500\tau = 5$. $P(X \leqslant 1) = P(X=0) + P(X=1) = e^{-5}\dfrac{5^0}{0!} + e^{-5}\dfrac{5^1}{1!} \simeq 0,04$.

   La probabilité que le serveur reçoive au plus une requête au cours d'une durée τ de 0,01 s est environ $0,04$.

   $P(X > n_0) = \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Or, pour $\lambda = 500\tau = 5$, on a, d'après la table donnant les probabilités pour la loi de Poisson :

   $P(X \geqslant 14) = 0$,
   $P(X = 13) = 0,001$,
   $P(X = 12) = 0,003$,
   $P(X = 11) = 0,008$,
   $P(X = 10) = 0,018$,
   $P(X = 9) = 0,036$,
   On a donc $P(X > 9) = 0,03 < 0,05$ tandis que $P(X > 8) = 0,086 > 0,5$.
   Ainsi, le plus petit entier recherché est $n_0 = 9$.

2. (a) $P(X > 120) = P\left(\dfrac{X-100}{10} > 2\right)$, où la variable aléatoire $\dfrac{X-100}{10}$ suit une loi normale centrée réduite. On trouve alors la probabilité recherchée dans la table de la loi normale :
   $P(X > 120) = P\left(\dfrac{X-100}{10} > 2\right) = 1 - \Pi(2) \simeq 1 - 0,9772 = 0,0228$

   (b) $P(100 - a \leqslant X \leqslant 100 + a) = P\left(\dfrac{a}{10} \leqslant \dfrac{X-100}{10} \leqslant \dfrac{a}{10}\right) = -1 + 2\Pi\left(\dfrac{a}{10}\right) = 0,99$.

   On cherche donc a tel que $\Pi\left(\dfrac{a}{10}\right) = 0,995$, soit, en utilisant la table de la loi normale :
   $\dfrac{a}{10} \simeq 2,575 \iff a \simeq 25,75$.

Partie B :

1. On appelle Y la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où le serveur connaît des dysfonctionnements importants au cours d'un mois de 30 jours.

   (a) Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,01$.

   (b)
   $$\begin{aligned} P(Y \leqslant 2) &= P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) \\ &= C_{30}^0 p^0 (1-p)^{30} + C_{30}^1 p^1 (1-p)^{29} + C_{30}^2 p^2 (1-p)^{28} \\ &= 0,99^{30} + 30 \times 0,01 \times 0,99^{29} + \frac{29 \times 28}{2} 0,01^2 \times 0,99^{28} \\ &\simeq 0,778 \end{aligned}$$

2. (a) de même que la variable aléatoire Y, Z suit une loi binomiale, de paramètres $n = 365$ et $p = 0,01$.

   (b) L'espérance mathématique de Z est $np = 3,65$ et son écart type $\sigma = \sqrt{npq}$ soit $\sigma = \sqrt{365 \times 0,01 \times 0,99} \simeq 1,90$.

Dans cette partie. on s'intéresse à la durée séparant deux requêtes successives reçues par le serveur.
On appelle T la variable aléatoire qui prend pour valeurs les durées (exprimées en secondes) séparant l'arrivée de deux requêtes successives sur le serveur.

1. On désigne par t un nombre réel positif. La probabilité que T prenne une valeur inférieure ou égale à t est donnée par : $p(T \leqslant t) = \int_0^t 500\mathrm{e}^{-500x}\,\mathrm{d}x$.
   (a) $P(T \leqslant t) = \int_0^t 500e^{-500x}\,dx = \left[-e^{-500x}\right]_0^t = -e^{-500t} + 1$
   (b) $P(T \leqslant t) = 0,95 \iff -e^{-500t} + 1 = 0,95 \iff t = \dfrac{-\ln 0,05}{500} \simeq 5,991\,10^{-3}$.
2. (a)
$$I(t) = \int_0^t 500x\,e^{-500x}\,dx = \int_0^t u(x)\,v'(x)\,dx$$
on intégre par parties avec, $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = 500e^{-500x}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-500x}\end{array}\right.$
$$\begin{aligned} I(t) &= [u(x)\,v(x)]_0^t - \int_0^t u'(x)\,v(x)\,dx \\ &= \left[-xe^{-500x}\right]_0^t - \int_0^t -e^{-500x}\,dx \\ &= -te^{-500t} + \left[\frac{-1}{500}e^{-500x}\right]_0^t \\ &= -te^{-500t} - \frac{1}{500}e^{-500t} + \frac{1}{500} \\ &= \frac{1}{500}\Big(-(500t+1)e^{-500t} + 1\Big) \end{aligned}$$
   (b) Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-500t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-500t} = 0$, on a donc, $m = \lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = \dfrac{1}{500}$,

Exercice 2 **10 points**

Dans cet exercice, on étudie un système « entrée-sortie »dont la sortie est modélisée par la fonction v_s solution de l'équation différentielle :

$$\tau v_s'(t) + v_s(t) = v_e(t) \qquad (1)$$

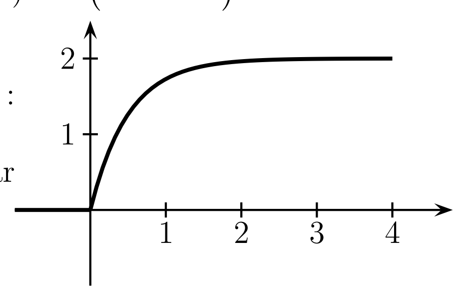
où $\tau > 0$ et v_e modélise l'état imposé en entrée du système.

Partie A :

Dans cette partie, on considère que $v_e(t) = 2$ pour tout réel t. L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\tau v_s'(t) + v_s(t) = 2 \qquad (2)$$

1. $h(t) = k \in \mathbb{R}$ est solution de (2) si et seulement si $\tau h' + h = 2 \iff 0 + k = 2 \iff k = 2$.
2. La solution de l'équation homogène $\tau y' + y = 0$ est $y(t) = Ke^{-t/\tau}$, $K \in \mathbb{R}$.
   La solution générale de l'équation différentielle est donc, $v_s(t) = 2 + Ke^{-t/\tau}$.
3. $v_s(0) = 0 \iff 2 + K = 1 \iff K = -1$, et donc, $v_s(t) = 2\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.
4. On considère dans cette question que $\tau = 0,5$, et alors : $v_s(t) = 2\,(1 - e^{-2t})$.
   On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v_s'(t) = 4e^{-2t} > 0$ car $e^u > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
   La fonction v_s est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.



On suppose que les fonctions v_s et v_e admettent des transformées de Laplace, que l'on notera respectivement V_s et V_e.

1. $pV_s(p) - v_s(0) + V_s(p) = V_e(p)$, or $v_s(0) = 0$, d'où, $V_s(p)\,(\tau p + 1) = V_e(p)$.
2. On en déduit la fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{V_s(p)}{V_e(p)} = \dfrac{1}{\tau p + 1}$.
3. $H(j\omega) = h(s) = \dfrac{1}{1 + js} = \dfrac{1 - js}{1 + s^2} = x(s) + jy(s)$ avec $\begin{cases} x(s) = \dfrac{1}{1+s^2} \\ y(s) = \dfrac{-s}{1+s^2} \end{cases}$

Partie C :

1. $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.
   Les fonctions x et y sont des fractions rationnelles, et donc, leur limite en $+\infty$ est égale à celle du rapport de leurs termes de plus haut degré :

$$\begin{cases} \lim\limits_{s \to +\infty} x(s) = \lim\limits_{s \to +\infty} \dfrac{1}{s^2} = 0 \\ \lim\limits_{s \to +\infty} y(s) = \lim\limits_{s \to +\infty} \dfrac{-s}{s^2} = \lim\limits_{s \to +\infty} \dfrac{-1}{s} = 0 \end{cases}$$

2. $\begin{cases} x'(s) = \dfrac{-2s}{(1+s^2)^2} \\ y'(s) = \dfrac{-(1+s^2) + 2s^2}{(1+s^2)^2} = \dfrac{s^2 - 1}{(1+s^2)^2} \end{cases}$ d'où,

s	0		1		$+\infty$
$x'(s)$	0		$-$		0
$x(s)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0
$y(s)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0
$y'(s)$	-1	$-$	0	$+$	0

3. Lorsque $s = 0$, $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$, d'où $A(1;0)$.
   Lorsque $s = 1$, $x(1) = \frac{1}{2}$ et $y(1) = -\frac{1}{2}$, d'où $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.
   En A, $x'(0) = 0$ et $y'(0) = -1$; ainsi, la tangente en A est verticale.
   En B, $x'(1) \neq 0$ et $y'(1) = 0$; ainsi la tangente en B est horizontale.

4.