Formulaire de mathématiques autorisé.

Exercice 1 *BTS, Groupement A, 2003* **10 points**

Cet exercice se compose de trois parties qui peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On s'intéresse aux requêtes reçues par le serveur web d'une grande entreprise, provenant de clients dispersés sur le réseau Internet.

La réception de trop nombreuses requêtes est susceptible d'engendrer des problèmes de surcharge du serveur.

Partie A :

Dans cette partie, on s'intéresse au nombre de requêtes reçues par le serveur, au cours de certaines durées jugées critiques.

On désigne par τ un nombre réel strictement positif. On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de requêtes reçues par le serveur dans un intervalle de temps de durée τ (exprimée en secondes). La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 500\tau$.

1. Dans cette question, on s'intéresse au cas où $\tau = 0,01$.
   Déterminer la probabilité que le serveur reçoive au plus une requête au cours d'une durée τ de 0,01 s.
   En expliquant votre démarche, déterniner le plus petit entier naturel n_0 tel que $p\left(X > n_0\right) < 0,05$.
2. Dans cette question, on s'intéresse au cas où $\tau = 0,2$.
   On rappelle que la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 100$ peut être approchée par la loi normale de moyenne $\mu = 100$ et d'écart type $\sigma = 10$.
   En utilisant cette approximation, calculer :
   (a) la probabilité $P(X > 120)$;
   (b) une valeur approchée du nombre réel positif a tel que $P(100 - a \leqslant X \leqslant 100 + a) = 0,99$.

Partie B :

Dans cette partie, on considère :

— d'une part, que la probabilité pour le serveur de connaître des dysfonctionnements importants au cours d'une journée donnée est $p = 0,01$;

— d'autre part, que des dysfonctionnements importants survenant au cours de journées distinctes constituent des évènements aléatoires indépendants.

1. On appelle Y la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où le serveur connaît des dysfonctionnements importants au cours d'un mois de 30 jours.
   (a) On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.
   (b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que le serveur connaisse au plus 2 jours de dysfonctionnements importants pendant un mois.
2. On appelle Z la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où le serveur connaît des dysfonctionnements importants au cours d'une année de 365 jours.
   (a) Donner, sans justification, la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.
   (b) Donner l'espérance mathématique et l'écart type de la variable aléatoire Z.

Partie C :

Dans cette partie. on s'intéresse à la durée séparant deux requêtes successives reçues par le serveur. On appelle T la variable aléatoire qui prend pour valeurs les durées (exprimées en secondes) séparant l'arrivée de deux requêtes successives sur le serveur.

égale à t est donnée par : $p(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t 500\mathrm{e}^{-500x}\,\mathrm{d}x$.

(a) Calculer $P(T \leqslant t)$ en fonction de t.

(b) En déduire la valeur de t pour laquelle $P(T \leqslant t) = 0,95$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au millième de seconde.

2. (a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$I(t) = \int_0^t 500x\mathrm{e}^{-500x}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Déterminer la limite m de $I(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
Le nombre m est l'espérance mathématique de la variable aléatoire T. Il représente la durée moyenne séparant la réception de deux requêtes successives.

Commentaire :
Ce modèle, très simple, intéresse les concepteurs de systèmes d'information ou de télécommunication car il fournit des évaluations de certaines performances d'un système, en particulier au sens du "scénario du pire des cas".

Exercice 2 **10 points**

Dans cet exercice, on étudie un système « entrée-sortie »dont la sortie est modélisée par la fonction v_s solution de l'équation différentielle :

$$\tau v_s'(t) + v_s(t) = v_e(t) \qquad (1)$$

où τ est une constante strictement positive et v_e modélise l'état imposé en entrée du système.
La partie A propose de résoudre directement l'équation différentielle (1) pour une fonction v_e particulière.
Dans la partie B, on se propose d'étudier la fonction de transfert du système dans le domaine de Laplace.
Enin, la partie C a pour objectif de tracer le lieu de cette fonction de transfert (diagramme de Black).

Partie A :

Dans cette partie, on considère que $v_e(t) = 2$ pour tout réel t. L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\tau v_s'(t) + v_s(t) = 2 \qquad (2)$$

1. Déterminer la fonction constante h solution de l'équation différentielle (2).
2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (2).
3. En déduire l'expression de la fonction v_s solution de l'équation différentielle (2) et qui vérifie la condition initiale $v_s(0) = 0$.
4. On considère dans cette question que $\tau = 0,5$. Dresser le tableau de variation de la fonction v_s et tracer sa courbe représentative.

Partie B :

On suppose que le système est initialement au repos (i.e. que v_s est une fonction causale et que $v_s(0) = 0$) et que les fonctions v_s et v_e admettent des transformées de Laplace, que l'on notera respectivement V_s et V_e.

1. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle (1).
2. En déduire l'expression de la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{V_s(p)}{V_e(p)}$.

Ecrire la fonction de transfert $H(j\omega)$ sous la forme $H(j\omega) = h(s) = x(s) + jy(s)$.

Partie C :

Soit (C) la courbe définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x(s) = \dfrac{1}{1+s^2} \\ y(s) = \dfrac{-s}{1+s^2} \end{cases}$, $s \in [0; +\infty[$.

1. Calculer $x(0)$ et $y(0)$, et déterminer les limites des fonctions x et y en $+\infty$.
2. Calculer les dérivées des fonctions x et y, puis établir le tableau des variations conjointes de x et y.
3. On note A le point de la courbe lorsque $s = 0$, et B le point de la courbe lorsque $s = 1$.
   Déterminer les coordonnées des points A et B.
   Préciser la direction de la tangente à la courbe (C) aux points A et B.
4. Tracer alors, en utilisant tous les résultats précédents, la courbe (C).