

Exercice 1

6 points

Soit les nombres complexes $a = \sqrt{3} - j$; $b = 2 - 2j$ et $z = \frac{a^4}{b^3}$.

1. Donner le module et un argument de a , b , a^4 et b^3 .
2. Calculer le module et un argument de z .

Exercice 2 *BTS, Groupement A1, Nouvelle Calédonie, 2006*

14 points

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique, et telle que :

$$\begin{cases} \varphi(t) = t & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ \varphi(t) = 0 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

On note $S(t)$ développement de Fourier associé à la fonction φ ; les coefficients de Fourier associés à la fonction φ sont notés a_0 , a_n , b_n où n est un nombre entier naturel non nul.

1. Représenter graphiquement la fonction φ sur l'intervalle $[-2\pi ; 4\pi]$.
2. a. Calculer a_0 , la valeur moyenne de la fonction φ sur une période.
 b. On rappelle que pour une fonction f , périodique de période T le carré de la valeur efficace sur une période est donné par : $\mu_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt$.

Montrer que μ_{eff}^2 , le carré de la valeur efficace de la fonction sur une période, est égal à $\frac{\pi^2}{6}$.

3. Montrer que, pour tout nombre entier $n \geq 1$, on a : $a_n = \frac{1}{\pi n^2} [\cos(n\pi) - 1]$.

On admet que, pour tout nombre entier $n \geq 1$, on a : $b_n = -\frac{\cos(n\pi)}{n}$.

4. Recopier et compléter le tableau avec les valeurs exactes des coefficients demandés.

a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
					$-\frac{2}{9\pi}$	$\frac{1}{3}$

5. On rappelle la formule de Parseval permettant de calculer le carré de la valeur efficace μ_3^2 de la fonction S_3 .

$$\mu_3^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} [a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2]$$

Calculer la valeur approchée de $\frac{\mu_3^2}{\mu_{\text{eff}}^2}$ arrondie à 10^{-2} .