Exercice 1 Soit $f(z) = \dfrac{z+i}{z-2i}$, pour $z \neq 2i$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 2i$. Donner les solutions sous forme algébrique.
2. Quel est l'ensemble des points P d'affixe z tel que $f(z)$ soit un nombre imaginaire pur ?
3. Quel est l'ensemble des points P d'affixe z tel que $f(z)$ soit un nombre réel ?

Exercice 2 *Nouvelle-Calédonie 2006*
Partie B.

On note j le complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On prend $p = j\omega$ où ω désigne un nombre réel positif. On a alors : $H(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega}$.

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 10 cm.

1. Montrer que l'ensemble (Δ) des points m d'affixe $z = 1 + j\omega$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0; +\infty[$ est une demi-droite que l'on caractérisera.
2. Quel est l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M d'affixe $Z = \dfrac{1}{1+j\omega}$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0; +\infty[$?
3. Représenter dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les ensembles (Δ) et $(\mathcal{C})$.

Exercice 3 Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2-périodique, telle que

$$f(t) = 2t - 1 \ , \quad \text{pour } t \in [0; 1] \ .$$

On note $S(t)$ la série de Fourier associée à f.

1. Représenter f sur l'intervalle $[-3; +3]$ dans un repère.
2. Calculer le coefficient a_0 de la série de Fourier $S(t)$.
3. Déterminer les coefficents a_n et b_n de la série de Fourier $S(t)$.
   Préciser les valeurs de rang pair et impair des coefficients a_n : a_{2p} et a_{2p+1} , pour $p \in \mathbb{N}$.
4. Ecrire la série $S(t)$.
   A-t-on $f(t) = S(t)$ pour tout t réel ?
5. Montrer que la série $U = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ est convergente, et déterminer sa somme.

Exercice 4 L'étude d'un mouvement amorti conduit à considérer la fonction causale f vérifiant l'équation différentielle (E) :

$$f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = e^{-t} \ , \quad \text{pour } t \geqslant 0 \ , \quad \text{avec} \ \left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{array} \right.$$

On suppose que la fonction f et ses dérivées admettent des transformées de Laplace, et on note $F = \mathcal{L}(f)$ la transformée de Laplace de f.

1. Montrer que

$$F(p) = \frac{p^2 + 3p + 3}{(p^2 + 2p + 2)(p+1)}$$

$$\frac{p^2+3p+3}{(p^2+2p+2)(p+1)} = \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2+2p+2}$$

3. a. Déterminer la fonction causale g, originale de la fonction G où :

$$G(p) = \frac{1}{p^2+2p+2}$$

   b. Déterminer l'expression de la fonction f, et tracer sa représentation graphique.

Exercice 5 On considère la fonction f, $\frac{\pi}{2}$-périodique, telle que, pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \sin x$.
On note $S(x)$ la série de Fourier associée à f.

1. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
2. Déterminer le coefficient a_0 de la série $S(x)$.
3. Déterminer les coefficients b_n, $n \geqslant 1$ de la série $S(x)$.
4. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{4}{\pi(4n+1)(1-4n)}$.
5. (a) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \ ; \ \lim_{x\to 0^-} f(x) \ ; \ \lim_{x\to 0^+} f'(x) \ ; \ \lim_{x\to 0^-} f'(x) \ ;$$

   (b) Ecrire le développement en série de Fourier $S(x)$.
   Montrer que les séries numériques suivantes sont convergentes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-16n^2} \quad ; \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-16n^2} \ .$$

   A partir du développement en série de Fourier $S(x)$, déterminer les valeurs de ces deux séries numériques.