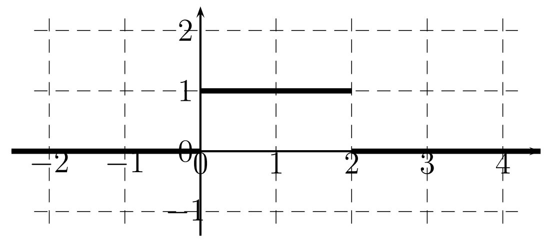
Exercice 1 **8 points**

1. Déterminer les transformées de Laplace F et G des fonctions f et g définies par :

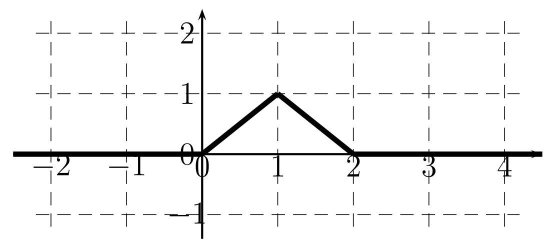
$$f(t) = (\cos 2t - 3\sin 4t)\,\mathcal{U}(t) \quad \Longrightarrow F(p) = \frac{p}{p^2+2^2} - 3\frac{4}{p^2+4^2} = \frac{p}{p^2+4} - \frac{12}{p^2+16}$$

$$g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \quad \Longrightarrow G(p) = e^{-\frac{\pi}{6}p}\frac{p}{p^2+1}$$



2. f est un créneau : $f(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)$.
   On a alors,

$$F(p) = \frac{1}{p} - e^{-2p}\frac{1}{p} = \frac{1-e^{-2p}}{p}$$



3. En temps, on a $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ t & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ -t+2 & \text{si} \quad 1 \leqslant t \leqslant 3 \\ 0 & \text{si} \quad t \geqslant 3 \end{cases}$
   soit
   $f(t) = t\,\mathcal{U}(t) - 2\,(t-1)\,\mathcal{U}(t-1) + (t-2)\,\mathcal{U}(t-2)$

   Ainsi, $F(p) = \dfrac{1}{p^2} - 2e^{-p}\dfrac{1}{p^2} + e^{-2p}\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1-2^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$

Exercice 2 *Session 2011* **12 points**

Partie A

1. Voir figure 1 du document réponse.
2. On a $\quad a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} 0,5(t+1)\,dt = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2}t^2 + t\right]_{-1}^{1} = \dfrac{1}{4} \times 2 = \dfrac{1}{2}$
3. (a) On a $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

   (b) On a, pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} 0,5(t+1)\sin(\pi t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t+1)\sin(\pi t)\,dt \end{aligned}$$

   On procède à une intégration par parties en posant

$$\begin{cases} u(t) = t+1 \\ v'(t) = \sin \pi t \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\dfrac{1}{\pi}\cos \pi t \end{cases}$$

   d'où

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}(t+1)\sin(\pi t)\,dt &= \left[-\frac{1}{\pi}(t+1)\cos \pi t\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos \pi t\,dt \\ &= -\frac{2}{\pi}\cos \pi + \frac{1}{\pi^2}\left[\sin \pi t\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

4. (a) On a, pour tout nombre réel $t \in]-1;1[$, $\quad g(t) = 0,5t$.
Pour la représentation graphique, voir figure 2 du document réponse.

(b) Comme la fonction g est impaire, la courbe représentative de la fonction g est symétrique par rapport à l'origine du repère.

(c) La fonction g étant impaire, pour tout entier naturel n, les coefficients de Fourier $a_n(g)$ sont nuls. Or, on a, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} g(t)\cos n\pi t\,dt = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} (f(t)-0,5)\cos n\pi t\,dt \\ &= \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(t)\cos n\pi t\,dt - 0,5\times\frac{2}{T}\int_{-1}^{1}\cos n\pi t\,dt \\ &= a_n(f) - \frac{1}{T}\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]_{-1}^{1} = a_n(f) \end{aligned}$$

D'où, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\quad a_n = 0$.

5. On a $f^2(t) = \dfrac{1}{4}(t+1)^2$, d'où

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(f(t))^2\,dt = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}(t+1)^2\,dt = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}(t+1)^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{8}\times\frac{1}{3}\times 2^3 = \frac{1}{3}$$

6. (a) On a $P = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2}\frac{5269}{3600} \approx 0,324$, d'où $\quad \dfrac{P}{f_{eff}^2} \approx 0,972$

(b) L'erreur commise est $\quad \dfrac{f_{eff}^2 - P}{f_{eff}^2} = 1 - \dfrac{P}{f_{eff}^2} \approx 0,028 \approx 2,8\%$

Document réponse numéro 2 à joindre à la copie

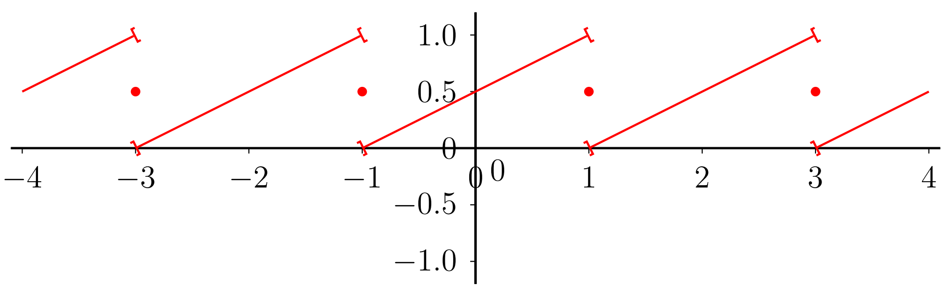


FIGURE 1 – représentation graphique de la fonction f

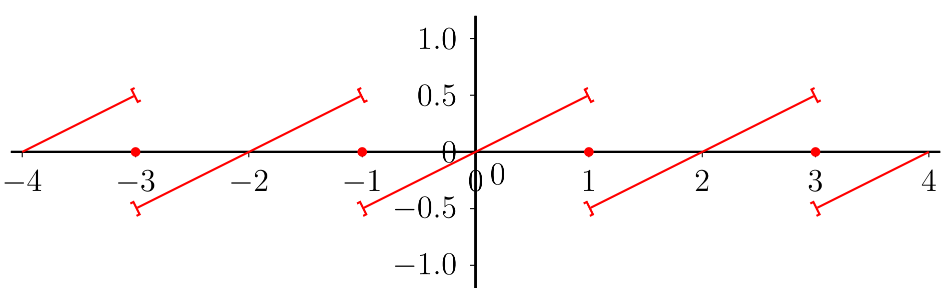


FIGURE 2 – représentation graphique de la fonction g