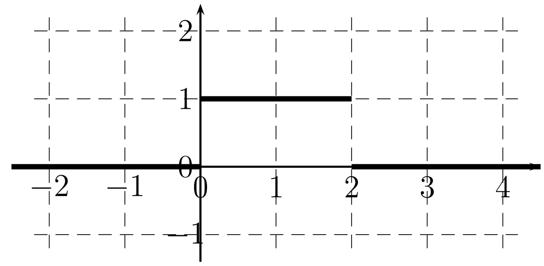
Exercice 1 **8 points**

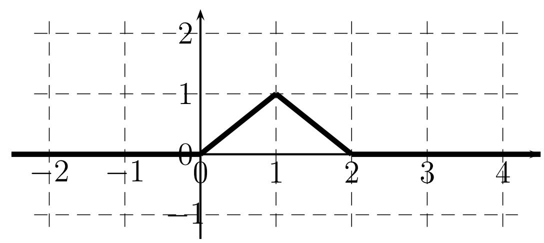
1. Déterminer les transformées de Laplace F et G des fonctions f et g définies par :

$$f(t) = (\cos 2t - 3\sin 4t)\,\mathcal{U}(t) \quad ; \quad g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$$

2. Définir la fonction f représentée graphiquement ci-contre en utilisant l'échelon unité $\mathcal{U}$, et déterminer sa transformée de Laplace $F(p)$.



3. Définir la fonction g représentée graphiquement ci-contre en utilisant l'échelon unité $\mathcal{U}$, et déterminer sa transformée de Laplace $G(p)$.



Exercice 2 *Session 2011* **12 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Le but de la partie A est de calculer le développement en série de Fourier d'une fonction périodique, puis de s'intéresser à la valeur efficace de cette fonction sur une période.
Dans la partie B, il s'agit de retrouver la représentation graphique d'une fonction à partir de son développement en série de Fourier puis de définir cette fonction.

Partie A

On considère la fonction f périodique, de période 2, définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\begin{cases} f(t) = 0,5t + 0,5 & \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ f(1) = 0,5 & \end{cases}$$

Le développement en série de Fourier de la fonction f s'écrit :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right).$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4 ; 4]$ en utilisant la figure 1 du document réponse numéro 1.
2. Démontrer que $a_0 = \dfrac{1}{2}$.
3. (a) Préciser la valeur de la pulsation ω.
   (b) En utilisant une intégration par parties, calculer b_1.
   On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 :
$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$
4. Soit g la fonction définie pour tout nombre réel t par $g(t) = f(t) - 0,5$.

numéro 1.

(b) Quelle propriété de symétrie observe-t-on sur la représentation graphique de la fonction g ?

(c) En comparant les coefficients de Fourier des fonctions f et g, montrer que $a_n = 0$ pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1.

5. On rappelle que la valeur efficace de la fonction f sur une période est le nombre réel positif, noté f_{eff}, défini par :

$$f_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [f(t)]^2 \, dt.$$

Démontrer que $f_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{3}$.

6. On rappelle la formule de Parseval : $\quad f_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$

On décide de calculer une valeur approchée, notée P, de f_{eff}^2 en se limitant aux cinq premiers termes de la somme, c'est-à-dire :

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

(a) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de P, puis de $\dfrac{P}{f_{\text{eff}}^2}$.

(b) En déduire, en pourcentage, l'erreur commise quand on remplace f_{eff}^2 par P.

Document réponse n° 1 à joindre avec la copie (exercice 2)

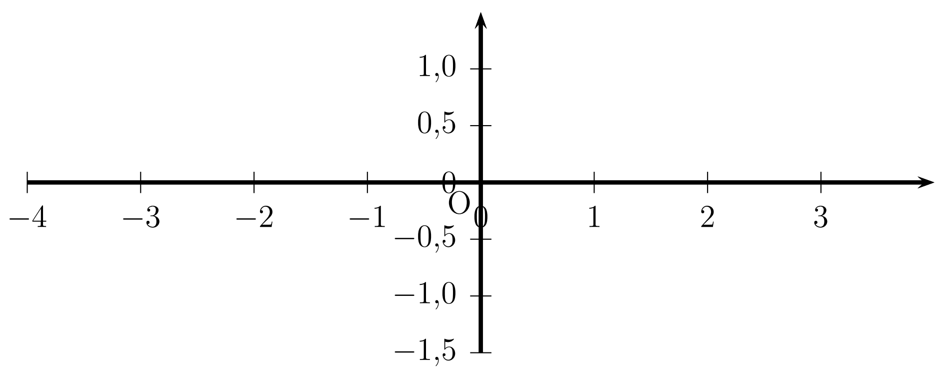


Figure 2 : représentation graphique de la fonction f (à compléter)

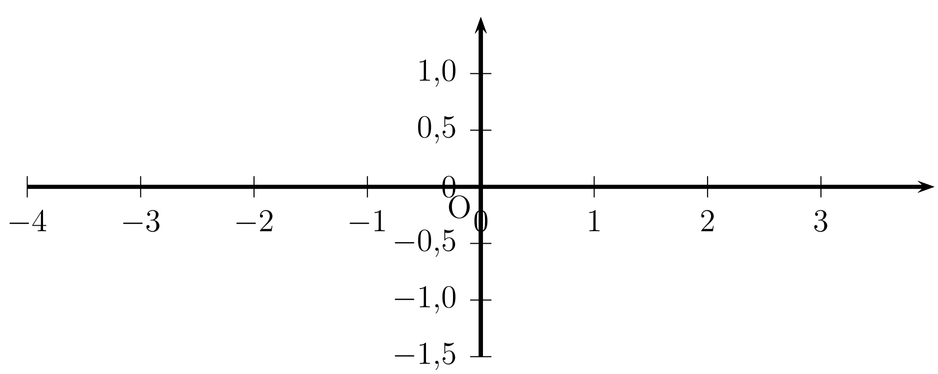


Figure 3 : représentation graphique de la fonction g (à compléter)