Partie A Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)\,dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,dx$$

1.
$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)\,dx = \frac{1}{n}\Big[\sin(nx)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{n}\Big(\sin(n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\Big)$$

or, pour tout entier n, $\sin(n\pi) = 0$, d'où $I_n = -\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

2. En intégrant par parties, avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos(nx) \end{cases}$, donc, $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{n}\sin(nx) \end{cases}$,

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,dx = \left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)\,dx \\ &= \frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0 + \frac{1}{n^2}\Big[\cos(nx)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}\cos(0) \\ &= \frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2} \qquad \text{, car } \cos(0) = 1 \end{aligned}$$

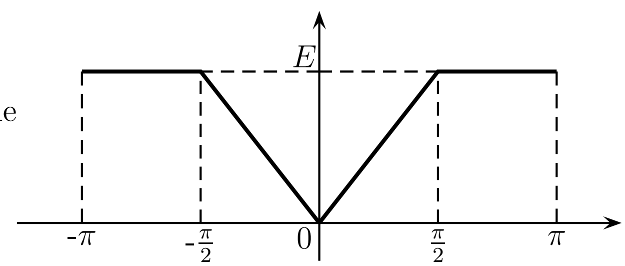
3. $I_1 = -\frac{1}{1}\sin\left(1\frac{\pi}{2}\right) = -1\,;\quad I_2 = -\frac{1}{2}\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) = 0\,;\quad I_3 = -\frac{1}{3}\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$

$J_1 = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{1^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{1^2} = \frac{\pi}{2} - 1$

$J_2 = 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

$J_3 = -\frac{\pi}{6} + 0 - \frac{1}{9} = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}$

Partie B



1. f est définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π, telle que :
$$\begin{cases} \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, & f(t) = \frac{2E}{\pi}t \\ \text{si } \frac{\pi}{2} < t \leqslant \pi, & f(t) = E \end{cases}$$

2. Soit a_0 et pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à f.

   (a) Comme f est paire,
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{2E}{\pi}t\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} E\,dt\right) = \frac{3E}{4}$$

   (b) Comme f est paire, pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = 0$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{2E}{\pi}t\cos(nt)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} E\cos(nt)\,dt\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{2E}{\pi}J_n + EI_n\right)\\
&= \frac{2E}{\pi^2}\left(2J_n + \pi I_n\right)
\end{aligned}$$

On a alors, pour tout entier $k \geqslant 1$, $a_{4k} = \dfrac{2E}{\pi^2}\left(2J_{4k} + \pi I_{4k}\right)$.
De plus, d'après la partie A,

$$J_{4k} = \frac{\pi}{2.4k}\sin\left(\frac{4k\pi}{2}\right) + \frac{1}{(4k)^2}\cos\left(\frac{4k\pi}{2}\right) - \frac{1}{(4k)^2} = 0 + \frac{1}{16k^2}\times 1 - \frac{1}{16k^2} = 0$$

et $I_{4k} = -\dfrac{1}{4k}\sin\left(4k\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ d'où, pour tout entier $k \geqslant 1$, $a_{4k} = 0$.

Partie C

1. $a_1 = \dfrac{2E}{\pi^2}\left(2J_1 + \pi I_1\right) = \dfrac{2E}{\pi^2}\left(2\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right) + \pi\times(-1)\right) = -\dfrac{4E}{\pi^2}$

   $a_2 = \dfrac{2E}{\pi^2}\left(2J_2 + \pi I_2\right) = \dfrac{2E}{\pi^2}\left(2\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \pi\times 0\right) = -\dfrac{2E}{\pi^2}$

   $a_3 = \dfrac{2E}{\pi^2}\left(2J_3 + \pi I_3\right) = \dfrac{2E}{\pi^2}\left(2\left(-\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{9}\right) + \pi\times\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{4E}{9\pi^2}$

2. $$F^2 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{2E}{\pi}t\right)^2 dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} E^2\,dt = \frac{4E^2}{\pi^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{E^2}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{2E^2}{3}$$

3. $$\begin{aligned}P &= a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) = \frac{9E^2}{16} + \frac{1}{2}\left[\frac{16E^2}{\pi^4} + \frac{4E^2}{\pi^4} + \frac{16E^2}{81\pi^4}\right] = \frac{9E^2}{16} + \frac{10E^2}{\pi^4} + \frac{8E^2}{81\pi^4}.\\ &\simeq 0,6666\,E^2\end{aligned}$$

   Comme $F^2 = \dfrac{2E^2}{3}$, on obtient donc, $\dfrac{P}{F^2} \simeq 0,999$.
   Ce dernier résultat très proche de 1, justifie que dans la pratique, on peut négliger les harmoniques d'ordre supérieur à 3.

Exercice 2 *Session 2007* **10 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle (E_1) suivante : $\dfrac{1}{2}y'(t) + y(t) = 10 - \beta \qquad (E_1)$.

1. On a, pour tout réel t, $\dfrac{1}{2}h'(t) + h(t) = \dfrac{1}{2}\times 0 + 10 - \beta = 10 - \beta$, et ainsi la fonction h définie par $h(t) = 10 - \beta$ est bien solution de l'équation différentielle (E_1).
2. L'équation homogène associée est : $\dfrac{1}{2}y'(t) + y(t) = 0$, et a pour solution $y(t) = Ke^{-2t}$, où K est une constante réelle quelconque.

   La solution générale s'écrit alors $f(t) = h(t) + Ke^{-2t} = 10 - \beta + Ke^{-2t}$.

Remarque : Comme la solution est donnée dans l'énoncé, et que la question est "vérifier que...", on peut simplement se contenter dans cette question de vérifier que cette expression vérifie $f(0) = 10$ et l'équation (E_1).

4. $f_\infty = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(10-\beta+\beta e^{-2t}\right) = 10-\beta$ car $\lim_{X\to+\infty} e^{-X} = 0$.

Partie B

On considère la fonction causale g qui vérifie la relation (E_2) suivante :

$$\frac{1}{2}g'(t) + g(t) = 13\int_0^t [10U(u) - g(u)]\,du + (10-\beta)U(t) \qquad (E_2)$$

et la condition $g(0) = 10$.

1. $i(t) = 130\int_0^t U(t)\,dt - 13\int_0^t g(u)\,du$, d'où, $I(p) = 130\dfrac{U(p)}{p} - 13\dfrac{G(p)}{p}$, avec $U(p) = \dfrac{1}{p}$ la transformée de Laplace de $U(t)$.
   Ainsi, $I(p) = \dfrac{130}{p^2} - 13\dfrac{G(p)}{p}$.
2. Dans le domaine de Laplace, l'équation E_2 s'écrit :
   $$\frac{1}{2}\left(pG(p) - g(0)\right) + G(p) = I(p) + (10-\beta)\frac{1}{p} = \frac{130}{p^2} - 13\frac{G(p)}{p} + (10-\beta)\frac{1}{p}$$
   d'où,
   $$G(p)\left(\frac{p}{2} + 1 + \frac{13}{p}\right) - 5 = \frac{130}{p^2} + (10-\beta)\frac{1}{p}$$
   et donc,
   $$\begin{aligned} G(p) &= \frac{1}{\dfrac{p}{2}+1+\dfrac{13}{p}}\left(\frac{130}{p^2} + (10-\beta)\frac{1}{p} + 5\right) = \frac{2p}{p^2+2p+26}\,\frac{130 + p(10-\beta) + 5p^2}{p^2} \\ &= 2\frac{130 + p(10-\beta) + 5p^2}{p(p^2+2p+26)} \end{aligned}$$
3. On a sous forme canonique : $p^2+2p+26 = (p+1)^2 + 5^2$, et
   $$\frac{10}{p} - \frac{2\beta}{(p+1)^2+5^2} = \frac{10\left(p^2+2p+26\right) - 2\beta p}{p\left(p^2+2p+26\right)} = 2\frac{5p^2+10p+130-\beta p}{p\left(p^2+2p+26\right)} = G(p).$$
4. $g_\infty = \lim_{p\to0^+} pG(p) = \lim_{p\to0^+} p\left(\dfrac{10}{p} - \dfrac{2\beta}{(p+1)^2+5^2}\right) = \lim_{p\to0^+}\left(10 - \dfrac{2\beta p}{(p+1)^2+5^2}\right) = 10$
5. (a) La transformée de Laplace de la fonction définie par $e^{-t}\sin(5t)U(t)$ est $H(p+1)$, où $H(p)$ est la transformée de Laplace de la fonction définie par $\sin(5t)U(t)$, soit $H(p) = \dfrac{5}{p^2+5^2}$, et donc la transformée de Laplace de la fonction $e^{-t}\sin(5t)U(t)$ est $\dfrac{5}{(p+1)^2+5^2}$.

   (b) On a donc, $g(t) = 10U(t) - \dfrac{2\beta}{5}e^{-t}\sin(5t)U(t)$.

Partie C

Dans cette partie, on prend $\beta = 5$.

On admet ici que pour tout nombre réel t positif ou nul : $f(t) = 5\mathrm{e}^{-2t} + 5$ et $g(t) = 10 - 2\mathrm{e}^{-t}\sin(5t)$.

On rappelle que f_∞ et g_∞ sont les limites respectives des fonctions f et g en $+\infty$. On a donc : $f_\infty = 5$ et $g_\infty = 10$.

1. (a) Pour tout nombre réel t positif ou nul on a : $\quad f_\infty \quad 5$

(b)
$$\frac{f(t)-f_\infty}{f_\infty} \leqslant 0,02 \iff e^{-2t} \leqslant 0,02 \iff -2t \leqslant \ln 0,02 \iff t \geqslant \frac{\ln 0,02}{-2}$$

Ainsi, $t_1 = \dfrac{\ln 0,02}{-2} \simeq 1,96$

2. On cherche t_2 tel que $-2\% \leqslant \dfrac{g(t)-g_\infty}{g_\infty} \leqslant 2\% \iff -2\% g_\infty \leqslant g(t)-g_\infty \leqslant 2\% g_\infty$ soit enore

$$(1-2\%)g_\infty \leqslant g(t_2) \leqslant (1+2\%)g_\infty$$

c'est-à-dire

$$9,8 \leqslant g(t_2) \leqslant 10,2$$

Soit t_2 le nombre réel tel que :

$$-0,02 \leqslant \frac{g(t)-g_\infty}{g_\infty} \leqslant 0,02 \quad \text{pour tout } t \geqslant t_2.$$

Graphiquement, une valeur approchée est $t_2 \simeq 2,22$