Formulaire de mathématiques autorisé.

Exercice 1 *Session 2003* **10 points**

Le but de cet exercice est de déterminer les premiers coefficients de Fourier et les principales harmoniques d'un signal.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)\,dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,dx$$

1. Montrer que $I_n = -\frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}$.
2. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $J_n = \frac{\pi}{2n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}$
3. Déterminer I_1, I_2 et I_3, puis J_1, J_2 et J_3.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π, telle que :

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, & f(t) = \frac{2E}{\pi}t \\ \text{si } \frac{\pi}{2} < t \leqslant \pi, & f(t) = E \end{cases}$$

où E est un nombre réel donné, strictement positif.

1. Tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$ (on prendra $E = 2$ uniquement pour construire la courbe représentant f).
2. Soit a_0 et pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à f.
   (a) Calculer a_0.
   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, donner la valeur de b_n.
   (c) En utilisant la partie A, vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{2E}{\pi^2}(2J_n + \pi I_n)$.
   Calculer a_{4k} pour tout entier $k \geqslant 1$.

Partie C

1. Déterminer les coefficients a_1, a_2, a_3.
2. Calculer F^2, carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.
   On rappelle que dans le cas où f est paire, périodique de période T, on a :
$$F^2 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt$$
3. On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne :
$$F^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$
   Soit P le nombre défini par $P = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$.
   Calculer P, puis donner la valeur décimale arrondie au millième du rapport $\frac{P}{F^2}$.
   Ce dernier résultat très proche de 1, justifie que dans la pratique, on peut négliger les harmoniques d'ordre supérieur à 3.

On s'intéresse à un système entrée-sortie susceptible d'être contrôlé.
Dans la partie A, on étudie le système en l'absence de contrôle.
Dans la partie B, on étudie le système soumis à un contrôle.
Les parties A, B et C sont indépendantes dans leurs résolutions respectives.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E_1) suivante :

$$\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = 10 - \beta \qquad (E_1)$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t et β une constante réelle.

1. Montrer que la fonction h définie pour tout nombre réel t par $h(t) = 10 - \beta$ est solution de l'équation différentielle (E_1).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_1).
3. Montrer que la fonction f, solution de l'équation différentielle (E_1) et qui vérifie $f(0) = 10$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \beta e^{-2t} + 10 - \beta$.
4. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ que l'on note f_∞.

Partie B

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

et qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle pour tout nombre réel strictement négatif.

On considère la fonction causale g qui vérifie la relation (E_2) suivante :

$$\frac{1}{2}g'(t) + g(t) = 13\int_0^t [10U(u) - g(u)]\,du + (10 - \beta)U(t) \qquad (E_2)$$

et la condition $g(0) = 10$.

On admet que la fonction g admet une transformée de Laplace notée G.

1. Montrer que la transformée de Laplace I de la fonction i définie par :

   $$i(t) = 13\int_0^t [10U(u) - g(u)]\,du$$

   est telle que

   $$I(p) = \frac{130}{p^2} - 13\frac{G(p)}{p}.$$

   Indication : On pourra utiliser la transformée de Laplace d'une intégrale : $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)\,dt\right)$
2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de la relation (E_2), déterminer une expression de $G(p)$.
3. Vérifier que $G(p) = \dfrac{10}{p} - \dfrac{2\beta}{(p+1)^2 + 5^2}$.

signal représenté par la fonction g.

On rappelle que, d'après le théorème de la valeur finale, $g_\infty = \lim_{p \to 0^+} pG(p)$.

Déterminer g_∞.

5. (a) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction qui à tout nombre réel t associe $e^{-t}\sin(5t)U(t)$.

   (b) En déduire l'expression de $g(t)$.

Partie C

Dans cette partie, on prend $\beta = 5$.

En **annexe 1, à rendre avec la copie**, on a représenté, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, les courbes C_f et C_g représentatives des fonctions f et g définies dans les parties A et B avec $\beta = 5$.

On admet ici que pour tout nombre réel t positif ou nul : $f(t) = 5e^{-2t} + 5$ et $g(t) = 10 - 2e^{-t}\sin(5t)$.

On rappelle que f_∞ et g_∞ sont les limites respectives des fonctions f et g en $+\infty$.
On a donc : $f_\infty = 5$ et $g_\infty = 10$.

1. (a) Vérifier que pour tout nombre réel t positif ou nul on a : $\dfrac{f(t) - f_\infty}{f_\infty} = e^{-2t}$.

   (b) Soit t_1 le nombre réel tel que :

   $$\frac{f(t) - f_\infty}{f_\infty} \leqslant 0,02 \quad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

   Calculer la valeur exacte de t_1, puis une valeur approchée de t_1 arrondie au dixième.

2. Soit t_2 le nombre réel tel que :

   $$-0,02 \leqslant \frac{g(t) - g_\infty}{g_\infty} \leqslant 0,02 \quad \text{pour tout } t \geqslant t_2.$$

   Graphiquement, déterminer une valeur approchée de t_2, arrondie au dixième.

Dans ce problème, on a étudié un système entrée-sortie, dans la partie A libre de tout asservissement, puis dans la partie B contrôlé par une commande intégrale.
On a montré que grâce à cette commande on peut stabiliser la sortie à la valeur 10 indépendamment de la perturbation β, au prix d'une détérioration du temps de réponse du système et de l'apparition d'oscillations amorties.

Document réponse à rendre avec la copie