Exercice 1 *Session 2010* **10 points**

On considère un système physique dont l'état est modélisé par la fonction y de la variable réelle t, solution de l'équation différentielle :

$$y''(t) + 4y(t) = e(t) \qquad (1),$$

où la fonction e représente une contrainte extérieure au système.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que $e(t) = 20$ pour tout nombre réel t. L'équation différentielle (1) s'écrit alors sous la forme :

$$y''(t) + 4y(t) = 20 \qquad (2).$$

1. Déterminer la fonction constante h solution particulière de l'équation différentielle (2).
2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (2).
3. En déduire l'expression de la fonction f solution de l'équation différentielle (2) qui vérifie les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie un moyen d'amener le système vers un état d'équilibre de manière « lisse ».
À cette fin on soumet le système à une contrainte extérieure modélisée par la fonction e définie par :

$$e(t) = 8tU(t) - 8(t - \tau)U(t - 1).$$

où τ désigne un nombre réel strictement positif.
On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} U(t) & = & 0 \quad \text{si } t < 0 \\ U(t) & = & 1 \quad \text{si } t \geqslant 0 \end{array}\right. .$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.
On appelle g la fonction causale telle que :

$$g''(t) + 4g(t) = e(t)$$

et vérifiant :

$$g(0) = 0 \text{ et } g'(0) = 0.$$

On note $G(p)$ la transformée de Laplace de la fonction g et $E(p)$ la transformée de Laplace de la fonction e.

1. Exprimer $E(p)$ en fonction de p et de τ.
2. En déduire que :
$$G(p) = \frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}\left(1 - e^{-\tau p}\right).$$
3. Déterminer les constantes réelles A et B telles que :
$$\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p^2+4}.$$

$p^2(p^2+4)$

5. En déduire que, pour tout nombre t :

$$g(t) = g_0(t) - g_0(t-\tau) \quad \text{avec} \quad g_0(t) = (2t - \sin(2t))U(t).$$

6. Montrer que pour $t \geqslant \tau$, on a

$$g(t) = 2\tau - \sin(2t) + \sin(2t - 2\tau).$$

7. **On suppose maintenant que** $\tau = \pi$.
   (a) Simplifier l'expression de $g(t)$ pour $t \geqslant \tau$.
   (b) La courbe représentative de la fonction e, pour $\tau = \pi$, est tracée sur la figure du **document réponse n° 1**.
   Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de la fonction g.

Exercice 2 *Session 2011* **10 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Le but de la partie A est de calculer le développement en série de Fourier d'une fonction périodique, puis de s'intéresser à la valeur efficace de cette fonction sur une période.
Dans la partie B, il s'agit de retrouver la représentation graphique d'une fonction à partir de son développement en série de Fourier puis de définir cette fonction.

Partie A

On considère la fonction f périodique, de période 2, définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\begin{cases} f(t) &= 0,5t + 0,5 \quad \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ f(1) &= 0,5 \end{cases}$$

Le développement en série de Fourier de la fonction f s'écrit :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right).$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$ en utilisant la figure 2 du document réponse numéro 2.
2. Démontrer que $a_0 = \dfrac{1}{2}$.
3. (a) Préciser la valeur de la pulsation ω.
   (b) En utilisant une intégration par parties, calculer b_1.
   On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 :

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

4. Soit g la fonction définie pour tout nombre réel t par $g(t) = f(t) - 0,5$.
   (a) Tracer la représentation graphique de la fonction g sur la figure 3 du document réponse numéro 2.
   (b) Quelle propriété de symétrie observe-t-on sur la représentation graphique de la fonction g ?
   (c) En comparant les coefficients de Fourier des fonctions f et g, montrer que $a_n = 0$ pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1.

noté f_{eff}, défini par :

$$f_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [f(t)]^2 \, dt.$$

Démontrer que $f_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{3}$.

6. On rappelle la formule de Parseval :

$$f_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

On décide de calculer une valeur approchée, notée P, de f_{eff}^2 en se limitant aux cinq premiers termes de la somme, c'est-à-dire :

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

(a) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de P, puis de $\dfrac{P}{f_{\text{eff}}^2}$.

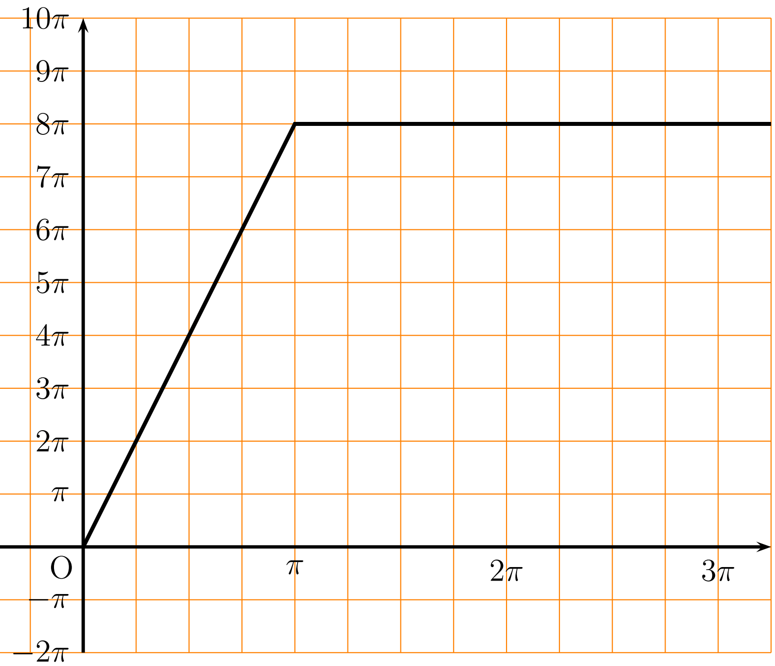
(b) En déduire, en pourcentage, l'erreur commise quand on remplace f_{eff}^2 par P.

Partie B

Soit h la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels, périodique de période 2, dont le développement en série de Fourier est :

$$S_h = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos[(2p+1)\pi t].$$

1. Déterminer la parité de la fonction h.
2. En annexe sont proposées quatre représentations graphiques.
   Laquelle des quatre courbes proposées est la représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$? Justifier le choix effectué.
3. Déterminer $h(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.



Document réponse n° 2 à joindre avec la copie (exercice 2)

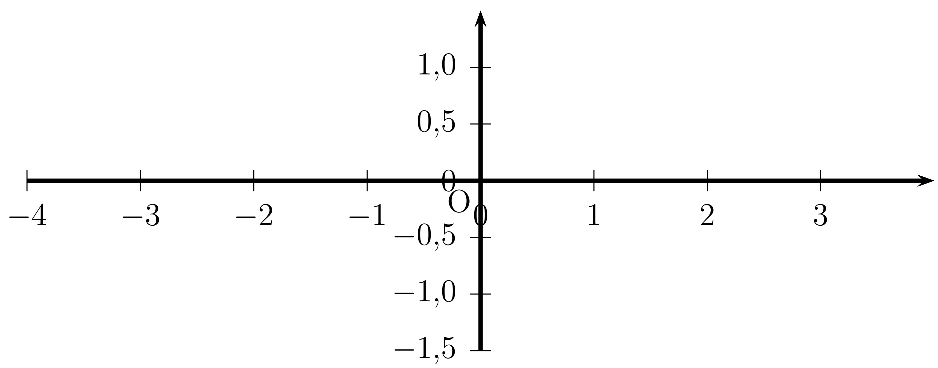


Figure 2 : représentation graphique de la fonction f (à compléter)

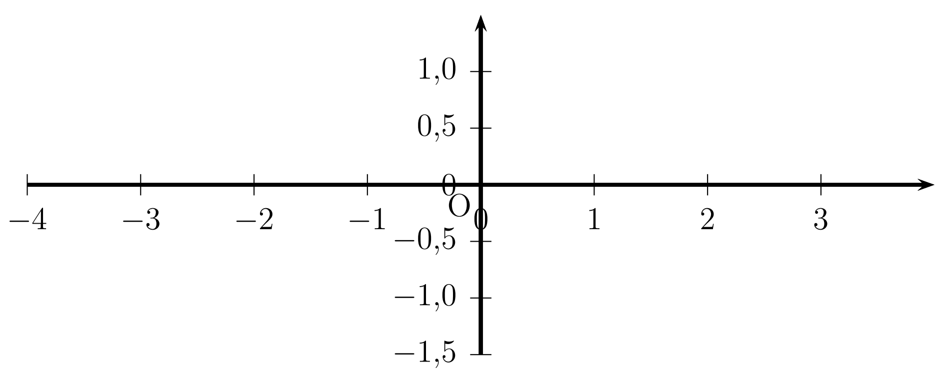
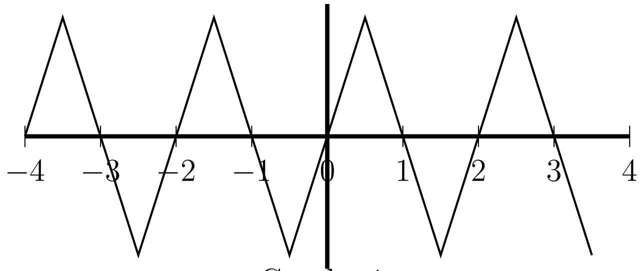
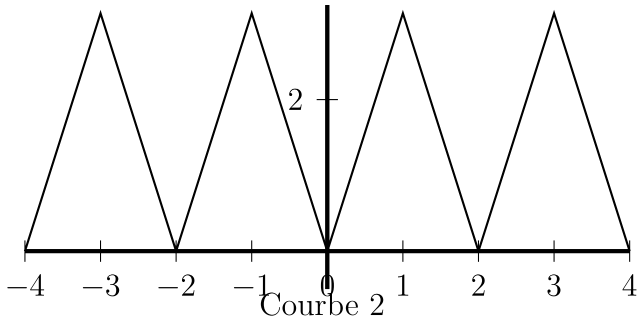


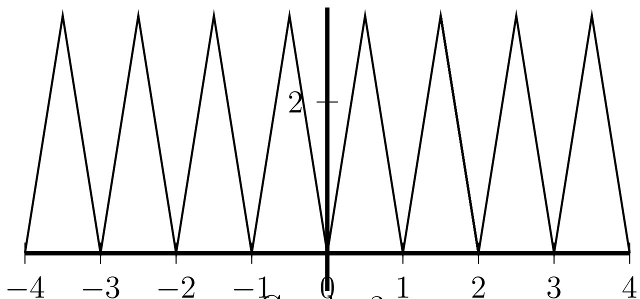
Figure 3 : représentation graphique de la fonction g (à compléter)



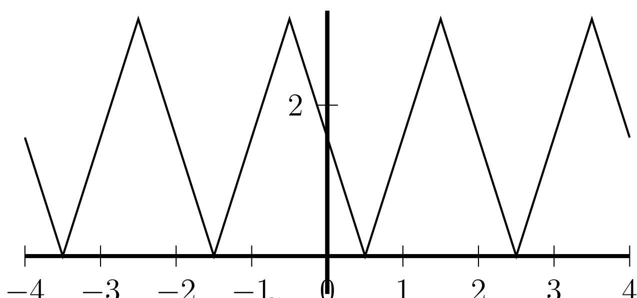
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4