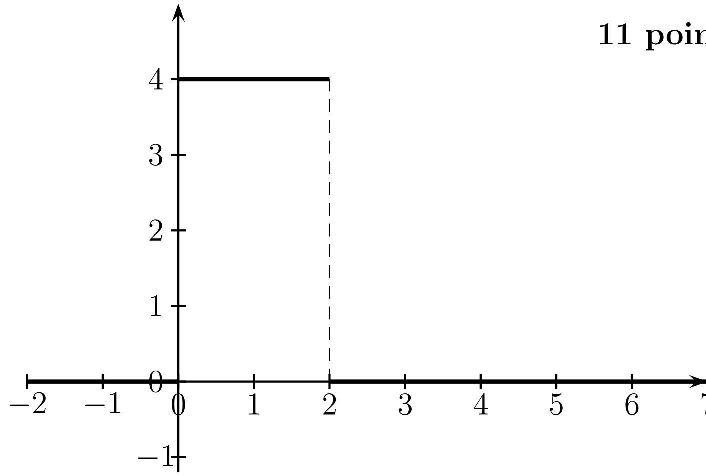
__Formulaire de mathématiques autorisé.__

Exercice 1 *BTS, Groupement A1, 2008* **11 points**

1. a.
$$e(t) = 4\left[U(t) - U(t-2)\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4 & \text{si } 0 \leqslant t < 2 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$



b. $E(p) = 4\left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{e^{-2p}}{p}\right] = \dfrac{4}{p}\left[1 - e^{-2p}\right]$.

2. On considère la fonction s telle que
$$4s'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s(0) = 0$$
On admet que la fonction s admet une transformée de Laplace, notée S.

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle, on a :
$$4\left(pS(p) - s(0^+)\right) + S(p) = E(p)$$
soit, comme $s(0^+) = 0$,
$$4pS(p) + S(p) = (4p+1)\,S(p) = E(p) \iff S(p) = \frac{1}{4p+1}E(p)$$
d'où,
$$S(p) = \frac{1}{4p+1}\frac{4}{p}\left(1 - e^{-2p}\right) = \frac{1}{p\left(p+\frac{1}{4}\right)}\left(1 - \mathrm{e}^{-2p}\right)$$

3.
$$\frac{1}{p\left(p+\frac{1}{4}\right)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+\frac{1}{4}} = \frac{(a+b)p + a\frac{1}{4}}{p\left(p+\frac{1}{4}\right)} \iff \begin{cases} a+b = 0 \\ a = 4 \end{cases}$$
On a donc $a = 4$ et $b = -4$, et $\dfrac{1}{p\left(p+\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{4}{p} - \dfrac{4}{p+\frac{1}{4}}$

4.

$F(p)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-2p}$	$\dfrac{1}{p+\frac{1}{4}}$	$\dfrac{1}{p+\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$	$U(t-2)$	$e^{-\frac{1}{4}t}U(t)$	$e^{-\frac{1}{4}(t-2)}U(t-2)$

$$\begin{aligned}
S(p) &= \frac{1}{p\left(p+\frac{1}{4}\right)}\left(1-e^{-2p}\right) = \left(\frac{4}{p} - \frac{4}{p+\frac{1}{4}}\right)\left(1-e^{-2p}\right)\\
&= 4\frac{1}{p} - 4\frac{1}{p}e^{-2p} - 4\frac{1}{p+\frac{1}{4}} + 4\frac{1}{p+\frac{1}{4}}e^{-2p}\\
s(t) &= 4U(t) - 4U(t-2) - 4e^{-\frac{1}{4}t}U(t) + 4e^{-\frac{1}{4}(t-2)}U(t-2)
\end{aligned}$$

b. On a donc,

- si $t<0$, $s(t)=0$
- si $0 \leqslant t < 2$, $s(t) = 4 - 4e^{-\frac{1}{4}t}$
- si $t \geqslant 2$, $s(t) = 4 - 4 - 4e^{-\frac{1}{4}t} + 4e^{-\frac{1}{4}(t-2)} = 4e^{-\frac{1}{4}t}\left(-1+e^{\frac{1}{2}}\right)$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases}
s(t) = 0 & \text{si } t<0\\
s(t) = 4 - 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} & \text{si } 0 \leqslant t < 2\\
s(t) = 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1\right) & \text{si } t \geqslant 2
\end{cases}$$

6. a. Sur l'intervalle $[0\,;\,2[$, on a : $s'(t) = 0 - 4\times\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-\frac{t}{4}} = e^{-\frac{t}{4}} > 0$

On en déduit que <u>la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,2[$</u>.

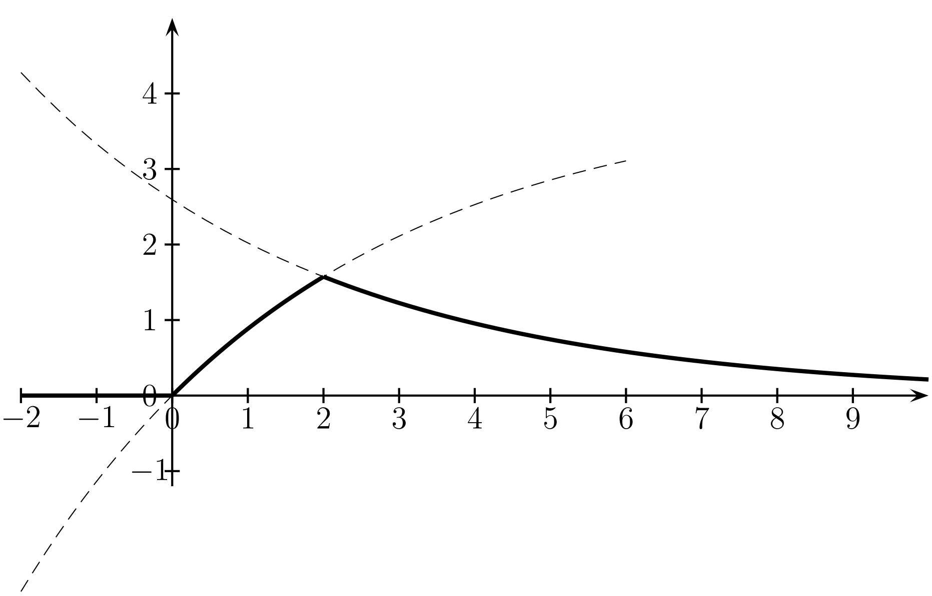
b. $\lim\limits_{t\to 2^-} s(t) = \lim\limits_{t\to 2^-}\left(4 - 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\right) = 4 - 4e^{-\frac{1}{2}}$.

7. a. Sur $[2\,;\,+\infty[$, $s'(t) = 4\times\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-\frac{1}{4}}\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right) = -e^{-\frac{1}{4}}\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)$.

Or, $e^{\frac{1}{2}} > e^0 = 1$, d'où, $e^{\frac{1}{2}} - 1 > 0$, on en déduit que $s'(t) < 0$: et donc que <u>la fonction s est strictement décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$</u>.

b. $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{4}} = 0$, d'où, $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = 0$.

8.



1. Soit la fonction numérique g définie sur $[0;\pi]$ par : $g(t) = (1+\cos^2 t)\sin^2 t$.

   a.
$$\begin{aligned} g'(t) &= (-2\sin t\cos t)\sin^2 t + 2\left(1+\cos^2 t\right)\sin t\cos t \\ &= -2\sin^3 t\cos t + 2\sin t\cos t + 2\sin t\cos^3 t \\ &= 2\sin t\cos t\left(-\sin^2 t + 1 + \cos^2 t\right) \end{aligned}$$

   or, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \iff -\sin^2 t = \cos^2 t - 1$, et donc,

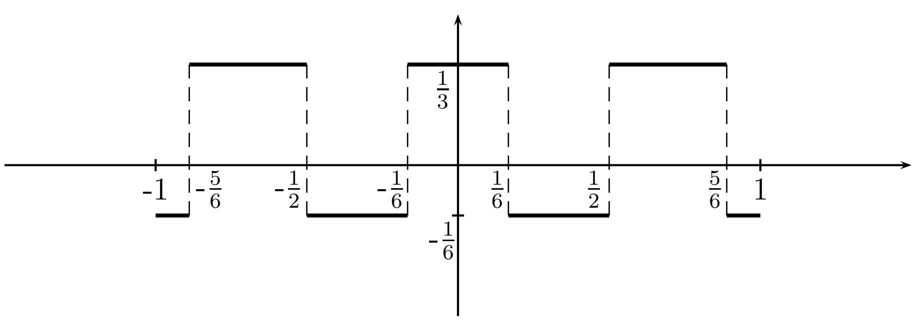
$$g'(t) = 2\sin t\cos t\left(\cos^2 t - 1 + 1 + \cos^2 t\right) = 4\sin t\cos^3 t$$

   b. On peut alors dresser le tableau de variation de g sur $[0;\pi]$:

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin t$		$+$	$\vert$	$+$	
$\cos t$		$+$	0	$-$	
$\cos^3 t$		$+$	0	$-$	
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. a. Pour $\tau = \dfrac{1}{6}$, f est définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 1 telle que :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{6} \\ f(t) = -\dfrac{1}{6} & \text{si } \dfrac{1}{6} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



   b. On calcule les coefficients de Fourier de S, 1-périodique, donc de pulsation $\omega = 2\pi$, et en utilisant la parité de S :

   - $$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = 2\int_0^{1/2} f(t)\,dt = 2\left(\int_0^{\tau}\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\,dt + \int_{\tau}^{1/2} -\tau\,dt\right) \\ &= 2\left(\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\tau - \tau\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\cos(n\omega t)\,dt = 2\left(\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\int_0^{\tau}\cos(2\pi nt)\,dt - \tau\int_{\tau}^{1/2}\cos(2\pi nt)\,dt\right) \\ &= 2\left(\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\left[\frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi t)\right]_0^{\tau} - \tau\left[\frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi t)\right]_{\tau}^{1/2}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2n\pi}\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\sin(2n\pi\tau) - \tau\frac{1}{2n\pi}\left(\sin(n\pi)-\sin(2n\pi\tau)\right)\right) \\ &= \frac{2}{2n\pi}\left(\frac{1}{2}\sin(2n\pi\tau)\right) = \frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi\tau) \end{aligned}$$

- $b_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, car f est paire

On obtient donc la série de Fourier :

$$\begin{aligned} S(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(2n\pi t) + b_n\sin(2n\pi t) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi\tau)\cos(2n\pi t) \end{aligned}$$

Comme f satisfait aux conditions de Dirichlet, on sait de plus que pour tout t où f est continue, $S(t) = f(t)$.

3. On décide de ne conserver que les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2.
Soit la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi t) + \frac{1}{2\pi}\sin(4\pi\tau)\cos(4\pi t)$$

On désigne par E_h^2 le carré de la valeur efficace de h sur une période.

a. D'après la formule de Parseval, $E_h^2 = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\left[a_1^2 + a_2^2\right] = \dfrac{1}{2\pi^2}\sin^2(2\pi\tau) + \dfrac{1}{8\pi^2}\sin^2(4\pi\tau)$,
soit, $E_h^2 = \dfrac{1}{2\pi^2}\left(\sin^2(2\pi\tau) + \dfrac{1}{4}\sin^2(4\pi\tau)\right)$

b. On a : $\sin(4\pi\tau) = 2\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi\tau)$, d'où,
$E_h^2 = \dfrac{1}{2\pi^2}\left(\sin^2(2\pi\tau) + \dfrac{1}{4}\left(2^2\sin^2(2\pi\tau)\cos^2(2\pi\tau)\right)\right) = \dfrac{1}{2\pi^2}\sin^2(2\pi\tau)\left(1+\cos^2(2\pi\tau)\right)$
et on a donc bien $E_h^2 = \dfrac{1}{2\pi^2}\,g(2\pi\tau)$.

4. D'après la première question, $g(t)$ est maximale pour $t = \dfrac{1}{2}$.
$g(2\pi\tau)$, et donc E_h^2, est maximale lorsque $2\pi\tau = \dfrac{\pi}{2}$, soit $\tau = \dfrac{1}{4}$.