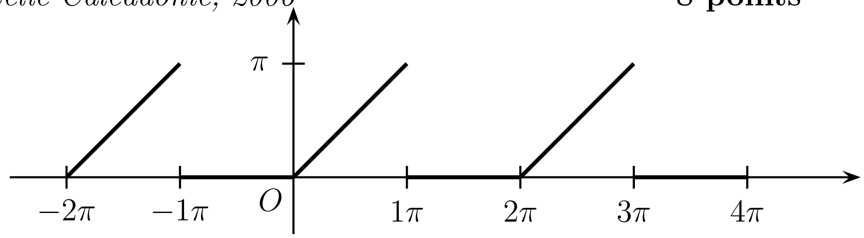
Exercice 1 *BTS, Groupement A1, Nouvelle Calédonie, 2006* **8 points**

1. φ est 2π-périodique avec :

$$\begin{cases} \varphi(t) = t & \text{si } 0 \leqslant t < \pi \\ \varphi(t) = 0 & \text{si } \pi \leqslant t < 2\pi \end{cases}$$



2. a. $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \varphi(t)\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi} = \dfrac{\pi}{4}$

   b. $\mu_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T [f(t)]^2\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t^2\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi} = \dfrac{\pi^2}{6}$

3. $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \varphi(t)\,\cos(n\omega t)\,dt$ avec $T = 2\pi$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1$, d'où,

   $a_n = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,\cos(nt)\,dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t\,\cos(nt)\,dt,$

   que l'on peut intégrer par parties, en posant $u = t$, $u' = 1$, et $v' = \cos(nt)$, $v = \dfrac{1}{n}\sin(nt)$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left([uv]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'v\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}t\,\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left([0-0] - \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi n^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right] \end{aligned}$$

4. a.

a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
$\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{2}{\pi}$	1	0	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{2}{9\pi}$	$\dfrac{1}{3}$

   b.

$$\begin{aligned} S_3\left(\frac{\pi}{4}\right) &= a_0 + a_1\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + b_1\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + a_2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + b_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + a_3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + b_3\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{1}{2}1 + \frac{2}{9\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{2}{\pi} + 1 + \frac{2}{9\pi} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{16}{9\pi} + \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

   puis, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - S_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4} - S_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\dfrac{16}{9\pi} + \dfrac{4}{3}\right) \simeq -0,04$ arrondie à 10^{-2}.

5. a.

$$\begin{aligned} \mu_3^2 &= a_0^2 + \frac{1}{2}\left[a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2\right] = \frac{\pi^2}{4^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{\pi^2} + 1 + 0 + \frac{1}{4} + \frac{4}{81\pi^2} + \frac{1}{9}\right] \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\left[\frac{4\times 82}{81\pi^2} + \frac{49}{36}\right] \end{aligned}$$

   b. On trouve, arrondies à 10^{-2}, $\mu_3^2 \simeq 1,45$ et $\mu_{\text{eff}}^2 = \dfrac{\pi^2}{6} \simeq 1,64$, d'où $\dfrac{\mu_3^2}{\mu_{\text{eff}}^2} \simeq 0,88$.

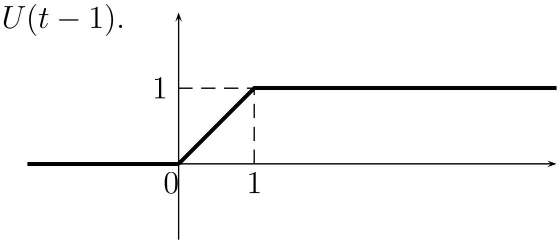
Exercice 2 *BTS, Groupement A1, Nouvelle Caléadonie, 2006* **8 points**

1. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle, on obtient la relation algébrique :

$$pS(p) - s(0^+) + S(p) = E(p)$$

   soit, puisque $s(0) = 0$, $pS(p) + S(p) = S(p)\,(p+1) = E(p) \iff S(p) = \dfrac{1}{p+1}E(p)$.

2. La fonction e est définie par : $e(t) = tU(t) - (t-1)U(t-1)$.



   a. On a : $\begin{cases} e(t) &= 0 & \text{si } \ t < 0 \\ e(t) &= t & \text{si } \ 0 \leqslant t < 1 \\ e(t) &= t - (t-1) = 1 & \text{si } \ t \geqslant 1 \end{cases}$

   b. $E(p) = \dfrac{1}{p^2} - e^{-p}\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{p^2}\left(1 - e^{-p}\right)$.

   c. On en déduit que $S(p) = \dfrac{1}{p+1}E(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)}\left(1 - e^{-p}\right)$.

   d. $$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p+1} = \frac{ap(p+1) + b(p+1) + cp^2}{p^2(p+1)} = \frac{(a+c)p^2 + (a+b)p + b}{p^2(p+1)}$$
   d'où, en identifiant : $b = 1$, $a + b = 0 \iff a = -1$, et $a + c = 0 \iff c = 1$, et donc,
   $$\frac{1}{p^2(p+1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$$

   e. D'après ce qui précède, $S(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)}\left(1 - e^{-p}\right) = \left(-\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p+1}\right)\left(1 - e^{-p}\right)$,

   et donc, $S(p) = -\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p+1} + e^{-p}\dfrac{1}{p} - e^{-p}\dfrac{1}{p^2} - e^{-p}\dfrac{1}{p+1}$

   ainsi, $s(t) = -U(t) + tU(t) + e^{-t}U(t) + U(t-1) - (t-1)U(t-1) - e^{-(t-1)}U(t-1)$

   soit, $s(t) = \left[-1 + t + e^{-t}\right]U(t) + \left[1 - (t-1) - e^{-(t-1)}\right]U(t-1)$

   f. On a alors, en temps :
   $$\begin{cases} s(t) &= 0 & \text{si } \ t < 0 \\ s(t) &= -1 + t + e^{-t} & \text{si } \ 0 \leqslant t < 1 \\ s(t) &= -1 + t + e^{-t} + 1 - (t-1) - e^{-t(t-1)} & \\ &= e^{-t} + 1 - e^{-(t-1)} & \\ &= 1 + e^{-t}(1 - e) & \text{si } \ 1 \leqslant t \end{cases}$$

3. a. $s\left(1^-\right) = \displaystyle\lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} s(t) = \lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \left(-1 + t + e^{-t}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

   $s\left(1^+\right) = \displaystyle\lim_{\substack{t \to 1 \\ t > 1}} s(t) = \lim_{\substack{t \to 1 \\ t > 1}} \left(1 + e^{-t}(1 - e)\right) = 1 + e^{-1}(1 - e) = 1 + e^{-1} - 1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

   On a donc $s(1^-) = s(1^+)$: la fonction s est continue en 1.

   b. Sur $]0\,;\,1[$: $s'(t) = 1 - e^{-t} = e^{-t}\left(e^{t} - 1\right)$. Or, comme la fonction exponentielle est strictement croissante, pour $0 < t < 1$, $e^0 = 1 < e^t < e^1 = e$, et donc s est croissante.

   Sur $]1\,;\,+\infty[$: $s'(t) = -e^{-t}(1 - e)$. Or $1 - e < 0$, et donc $s'(t) < 0$, d'où s est décroissante.

   c. On en déduit donc que s est croissante sur $]0\,;\,1[$ et décroissante sur $]1\,;\,+\infty[$.

   d. Comme $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$, on a donc $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(1 + e^{-t}(1 - e)\right) = 1$.

   e. $pS(p) = p\dfrac{1}{p^2(p+1)}\left(1 - e^{-p}\right) = \dfrac{1}{p(p+1)}\left(1 - e^{-p}\right)$

   Or, $e^{-p} \underset{p \to 0}{\sim} 1 - p$ et donc $1 - e^{-p} \underset{p \to 0}{\sim} p$, d'où $p\,S(p) \underset{p \to 0}{\sim} \dfrac{1}{p(p+1)}p = \dfrac{1}{p+1}$, et donc, $\displaystyle\lim_{p \to 0^+} pS(p) = 1$. On retrouve alors le théorème de la valeur finale : $\displaystyle\lim_{p \to 0^+} pS(p) = \lim_{t \to +\infty} s(t) = 1$