Formulaire de mathématiques autorisé.

Exercice 1 *BTS, Groupement A1, Nouvelle Caléadonie, 2006* **10 points**

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, et telle que :

$$\left\{\begin{array}{lllll}\varphi(t) & = & t & \text{si} & 0 \leqslant t < \pi \\ \varphi(t) & = & 0 & \text{si} & \pi \leqslant t < 2\pi\end{array}\right.$$

On note $S(t)$ développement de Fourier associé à la fonction φ ; les coefficients de Fourier associés à la fonction φ sont notés a_0, a_n, b_n où n est un nombre entier naturel non nul.

1. Représenter graphiquement la fonction φ sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 4\pi]$.
2. a. Calculer a_0, la valeur moyenne de la fonction φ sur une période.

   b. On rappelle que pour une fonction f, périodique de période T le carré de la valeur efficace sur une période est donné par : $\mu_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T [f(t)]^2\,dt$.

   Montrer que μ_{eff}^2, le carré de la valeur efficace de la fonction sur une période, est égal à $\dfrac{\pi^2}{6}$.
3. Montrer que. pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on a : $a_n = \dfrac{1}{\pi n^2}[\cos(n\pi) - 1]$.

   On admet que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on a : $b_n = -\dfrac{\cos(n\pi)}{n}$.
4. On considère la fonction S_3 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$S_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}[a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)]$$

   où les nombres a_0, a_n ,b_n sont les coefficients de Fourier associés à la fonction φ définie précédemment.

   a. Recopier et compléter le tableau avec les valeurs exactes des coefficients demandés.

a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
					$-\dfrac{2}{9\pi}$	$\dfrac{1}{3}$

   b. Calculer la valeur exacte de $S_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ puis donner la valeur approchée de $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - S_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ arrondie à 10^{-2}.
5. On rappelle la formule de Parseval permettant de calculer le carré de la valeur efficace μ_3^2 de la fonction S_3.

$$\mu_3^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\left[a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2\right]$$

   a. Calculer la valeur exacte de μ_3^2.

   b. Calculer la valeur approchée de $\dfrac{\mu_3^2}{\mu_{\text{eff}}^2}$ arrondie à 10^{-2}.

Dans ce problème, on s'intéresse à un filtre modélisé mathématiquement par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} s'(t) + s(t) & = & e(t) \\ s(0) & = & 0 \end{cases}$$

La fonction e représente l'entrée aux bornes du filtre et la fonction s la sortie.

On admet que les fonctions e et s admettent des transformées de Laplace respectivement notées E et S. La fonction de transfert H du filtre est définie par :

$$S(p) = H(p) \times E(p).$$

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U, est définie par :

$$\begin{cases} U(t) & = & 0 & \text{si} & t < 0 \\ U(t) & = & 1 & \text{si} & t \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Montrer que : $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$.
2. La fonction e est définie par : $e(t) = tU(t) - (t-1)U(t-1)$.

   a. Représenter graphiquement la fonction e.

   b. Montrer que : $E(p) = \dfrac{1}{p^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-p}\right)$.

   c. En déduire $S(p)$.

   d. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

   $$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p+1}$$

   e. En déduire l'original s de S.

   f. Vérifier que :

   $$\begin{cases} s(t) & = & 0 & \text{si} & t < 0 \\ s(t) & = & t - 1 + \mathrm{e}^{-t} & \text{si} & 0 \leqslant t < 1 \\ s(t) & = & 1 + (1 - \mathrm{e})\mathrm{e}^{-t} & \text{si} & 1 \leqslant t \end{cases}$$

3. a. Comparer $s\left(1^-\right)$ et $s\left(1^+\right)$.

   b. Calculer $s'(t)$ et étudier son signe sur les intervalles $]0\ ;\ 1[$ et $]1\ ;\ +\infty[$.

   c. En déduire le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $]0\ :\ +\infty[$.

   d. Déterminer la limite de la fonction s en $+\infty$.

   e. Calculer la limite $\lim\limits_{p \to 0} (pS(p))$. Quel résultat retrouve-t-on ?