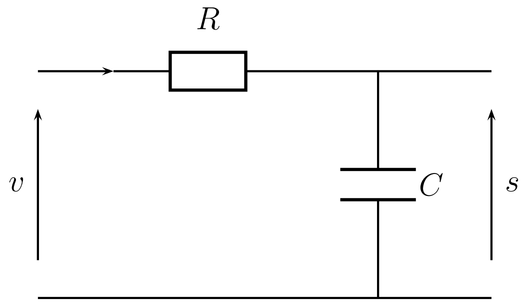
Devoir de mathématiques - BTS

Formulaire de mathématiques autorisé.

Exercice 1 - Session 2011 **10 points**

On considère un circuit composé d'une résistance et d'un condensateur représenté par le schéma ci-dessous.



s représente la tension entre les bornes du condensateur lorsque le circuit est alimenté par une source de tension v et parcouru par un courant i.

Les fonctions s et v sont liées par l'équation différentielle suivante :

$$RCs'(t) + s(t) = v(t).(1)$$

De plus, on suppose que $s(t) = 0$, pour tout nombre réel t négatif ou nul.

Pour tout l'exercice on considère que $R = 250 \cdot 10^3\ \Omega$ et $C = 20 \cdot 10^{-9}$ F.

On rappelle que la fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) &= 0 \quad \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) &= 1 \quad \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

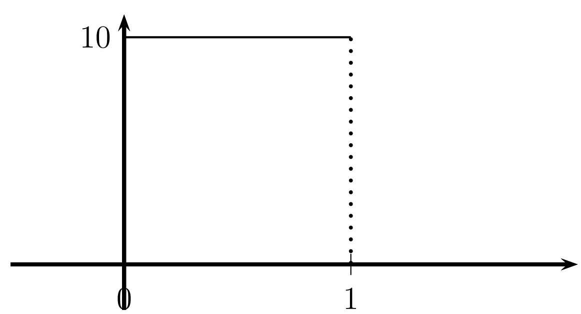
Les parties A, B et C de l'exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A : QCM

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de chaque question suivi de la réponse choisie.

Une bonne réponse rapporte 1 point, ***une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point****.*

1. La fonction f est un créneau représenté par le schéma suivant :



$f(t)$ est défini par :

- $10\mathcal{U}(t-1)$
- $10\left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\right]$
- $10\mathcal{U}(t)$
- $\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$

2. On note V et S les transformées de Laplace respectives des fonctions v et s.
On précise que $s\left(0^{+}\right)=0$. Les transformées de Laplace V et S sont telles que :

- $S(p)=\dfrac{1}{1+0,005p}V(p)$
- $s(t)=\dfrac{1}{1+0,005p^2}V(p)$
- $S(p)=\dfrac{0,005}{0,005+p}V(p)$
- $S(p)=(10,005)V(p)$

3. Dans cette question, on suppose que $v(t)=2$ pour tout nombre réel t positif ou nul.
L'équation différentielle (1) s'écrit alors :

$$0,005s'(t)+s(t)=2.$$

Pour tout nombre réel t positif ou nul, la solution générale s de l'équation différentielle (1) est définie, k étant une constante réelle, par :

- $s(t)=k\mathrm{e}^{-200t}+2t$
- $s(t)=k\mathrm{e}^{200t}+2$
- $s(t)=k\mathrm{e}^{-200t}+2$
- $s(t)=k\mathrm{e}^{-200t}$

Partie B : simulation numérique

Pour simuler le fonctionnement du circuit, on approche la tension d'entrée v par un signal discret causal x et la tension de sortie s par un signal discret causal y.

Un pas de discrétisation T_e étant choisi, les signaux x et y vérifient, pour tout nombre entier n, l'équation :

$$0,005\frac{y(n)-y(n-1)}{T_e}+y(n)=x(n). \qquad (2)$$

1. Dans toute la suite de l'exercice, on choisit $T_e=0,5\cdot 10^{-3}$ s.
Montrer que l'équation (2) s'écrit alors :

$$11y(n)-10y(n-1)=x(n).$$

2. On suppose désormais que $x(n)=2e(n)$ où e est l'échelon unité causal discret défini par $e(n)=1$ pour tout entier naturel n.
(a) Montrer que la transformée en Z du signal discret y, notée $Y(z)$, vérifie :

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{2}{11}\times\frac{z}{(z-1)\left(z-\dfrac{10}{11}\right)}.$$

(b) Vérifier que :

$$Y(z)=\frac{2}{11}\left(\frac{11z}{z-1}-\frac{10z}{z-\dfrac{10}{11}}\right).$$

(c) En déduire l'expression de $Y(z)$ sous forme d'une somme.

3. (a) Exprimer $y(n)$ en fonction de n, pour tout nombre entier naturel n.
(b) Calculer la limite de $y(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Partie C

On admet que $y(n) = 2 - 2\left(\dfrac{10}{11}\right)^{n+1}$.

1. Compléter le tableau de valeurs du signal numérique y figurant sur le document réponse numéro 1. Les résultats seront arrondis au centième.
2. Représenter graphiquement le signal numérique y sur la figure 1 du document réponse numéro 1.

Exercice 2 - Session 2009, groupement A2 — 9 points

Le but de cet exercice est d'établir, avec un minimum de calculs, le développements en série de Fourier de fonctions périodiques rencontrées en électricité.

1. On considère un entier n strictement positif. Montrer que :

$$\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2}.$$

   Pour la suite de l'exercice, on admet que : $\displaystyle\int_0^1 \sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, telle que :

$$\begin{cases} f(t) & = t \text{ sur } [0\ ;\ 1[\\ f(t) & = 0 \text{ sur } [1\ ;\ 2[\end{cases}.$$

   (a) En utilisant le document réponse n° 2, à rendre avec la copie, tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$.

   (b) On appelle S_f la série de Fourier associée à la fonction f. On note
   $S_f(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}(a_n\cos(n\pi t) + b_n\sin(n\pi t))$.
   Calculer a_0.
   Donner les valeurs des coefficients a_n et b_n, et en déduire que :

$$S_f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right).$$

   (c) Calculer le carré de la valeur efficace de la fonction f, défini par
   $\mu_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 (f(t))^2\,\mathrm{d}t$.

   (d) Recopier et compléter, avec les valeurs exactes le tableau 1.

n	1	2	3
a_n			
b_n			

TABLE 1

(e) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel A défini par :

$$A = \frac{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\left(a_n^2 + b_n^2\right)}{\mu_{\text{eff}}^2}.$$

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, dont la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est tracée sur l'intervalle $[-4~;~4]$ dans le document réponse n° 2.
On admet que le développement en série de Fourier S_g associé à la fonction g, est défini par $S_g(t) = S_f(-t)$.
Justifier que :

$$S_g(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right).$$

4. Soit h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, périodiques de période 2, telles que : $h(t) = f(t) + g(t)$ et $k(t) = f(t) - g(t)$ pour tout nombre t.
   (a) Sur le document réponse n° 3, à rendre avec la copie, tracer les courbes $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_k$ représentatives des fonctions h et k sur l'intervalle $[-4~;~4]$.
   (b) On admet que les développements en série de Fourier S_h et S_k associés respectivement aux fonctions h et k, sont définis par :

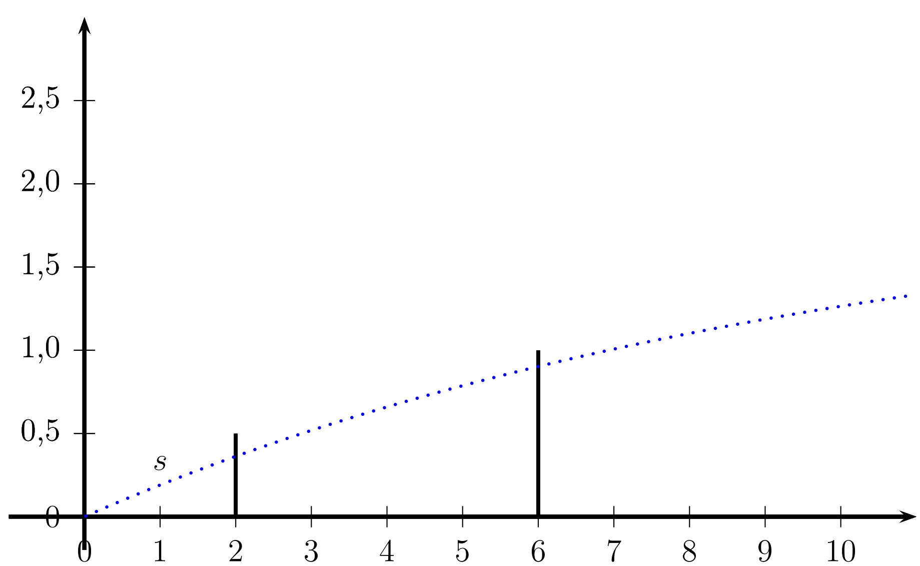
$$S_h(t) = S_f(t) + S_g(t) \quad \text{et} \quad S_k(t) = S_f(t) - S_g(t).$$

   Déterminer les coefficients de Fourier associés respectivement aux fonctions h et k.

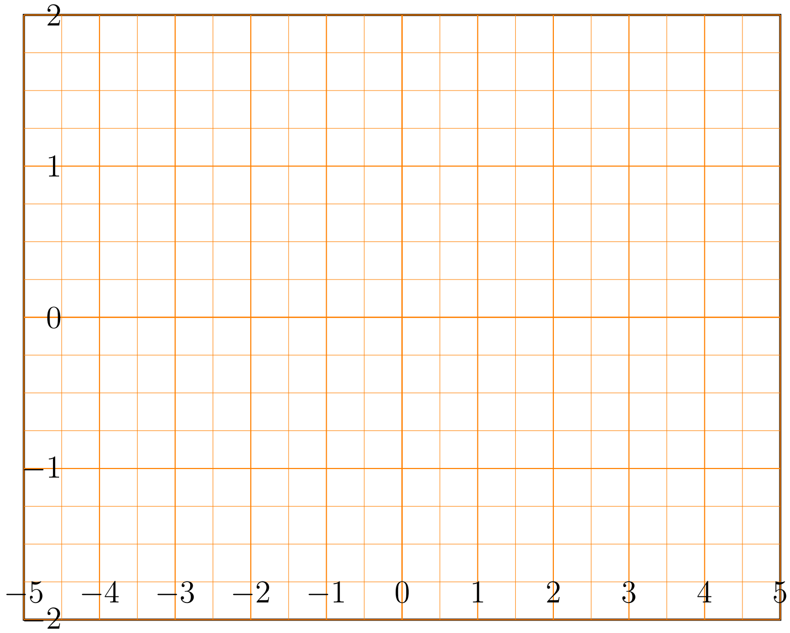
Document réponse numéro 1 à joindre à la copie

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y(n)$		0,35				0,87			1,15		1,30

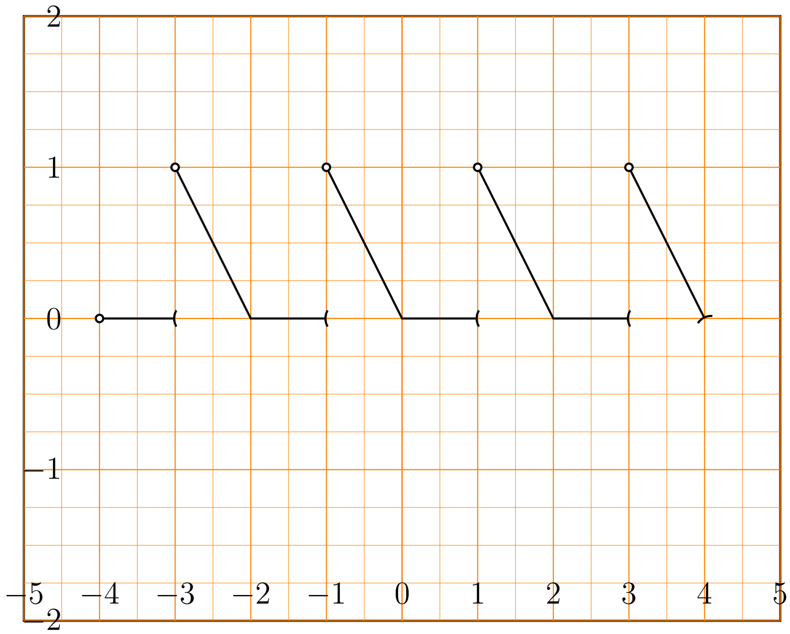
Tableau de valeurs de la suite y (à compléter)



Document réponse numéro 2 à joindre à la copie

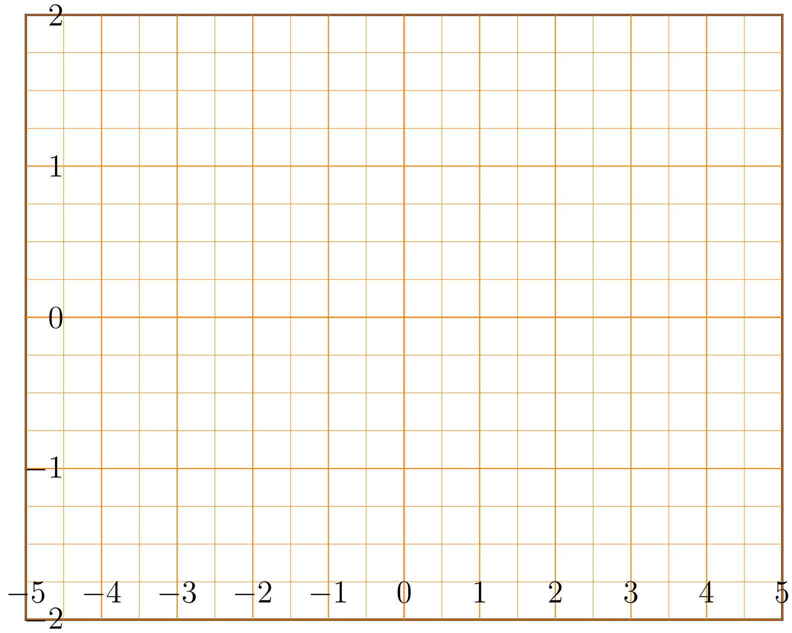


(a) Représentation de la fonction f

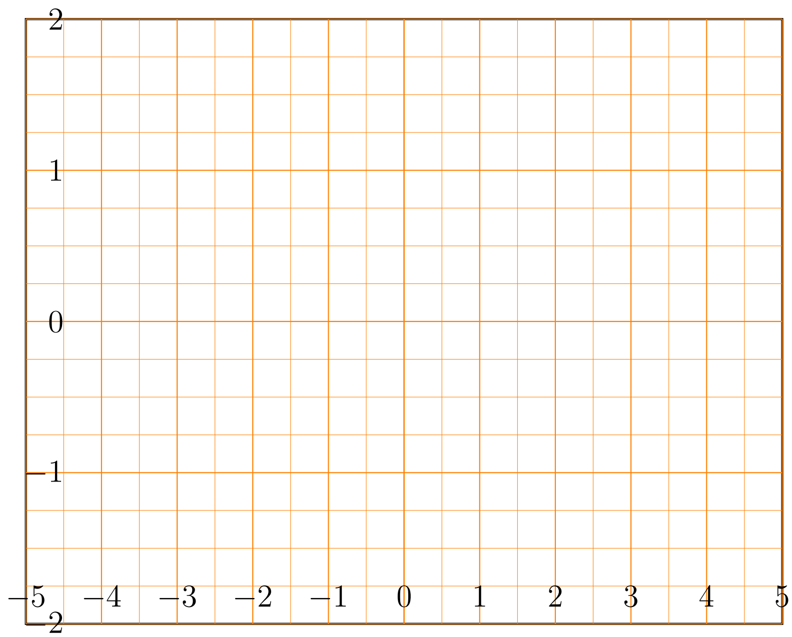


(b) Représentation de la fonction g

Document réponse numéro 3 à joindre à la copie



(a) Représentation de la fonction h



(b) Représentation de la fonction k