Formulaire de mathématiques autorisé.

Exercice 1 *BTS, Groupement A1, 2008* **11 points**

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e(t) = 4\,[U(t) - U(t-2)]$$

   a. Tracer la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthonormal.

   b. On note E la transformée de Laplace de la fonction e.
   Déterminer $E(p)$.

2. On considère la fonction s telle que

$$4s'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s(0) = 0$$

   On admet que la fonction s admet une transformée de Laplace, notée S.
   Démontrer que :

$$S(p) = \frac{1}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)}\left(1 - \mathrm{e}^{-2p}\right)$$

3. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\frac{1}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p + \frac{1}{4}}$$

4. Compléter le tableau ci-dessous dans lequel f représente la fonction causale associée à F :

$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-2p}$	$\frac{1}{p + \frac{1}{4}}$	$\frac{1}{p + \frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$			

5. a. Déterminer $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque.

   b. Vérifier que :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = 4 - 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} & \text{si } 0 \leqslant t < 2 \\ s(t) = 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1\right) & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

b. Déterminer $\lim\limits_{\substack{t \to 2 \\ t<2}} s(t)$.

7. a. Déterminer le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

   b. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$.

8. Tracer la courbe représentative de la fonction s dans un repère orthonormal.

Exercice 2 *BTS, Groupement A, 2005* **9 points**

1. Soit la fonction numérique g définie sur $[0; \pi]$ par

$$g(t) = \left(1 + \cos^2 t\right)\sin^2 t.$$

   a. Montrer que $g'(t) = 4\sin t \cos^3 t$.

   b. En déduire les variations de g sur $[0; \pi]$.

2. Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 1 telle que :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(t) & = & \dfrac{1}{2} - \tau & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ f(t) & = & -\tau & \text{si } \tau < t \leqslant \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad \text{où } \tau \text{est un nombre réel tel que } 0 < \tau < \dfrac{1}{2}$$

   a. *Uniquement dans cette question, on prendra* $\tau = \dfrac{1}{6}$.
   Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ dans un repère orthonormal.

   b. On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet.
   Soit S le développement en série de Fourier associé à la fonction f.
   Montrer que :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n\pi} \sin(2n\pi\tau)\cos(2n\pi t)$$

3. On décide de ne conserver que les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2.
   Soit la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi t) + \frac{1}{2\pi}\sin(4\pi\tau)\cos(4\pi t)$$

   On désigne par E_h^2 le carré de la valeur efficace de h sur une période.

   a. À l'aide de la formule de Parseval, déterminer E_h^2.

   b. Montrer que $E_h^2 = \dfrac{1}{2\pi^2}\, g(2\pi\tau)$.

4. Déterminer la valeur de τ rendant E_h^2 maximal.