Exercice 1 *BTS, Groupement A1, 2010* **3 points**

$$y''(t) + 4y(t) = 20 \qquad (1)\,.$$

1. Soit $h(t) = k$, $k \in \mathbb{R}$ une fonction constante, alors h est solution de (1) si $h''(t) + 4h(t) = 20 \iff 4k = 20 \iff k = 5$.
   Donc la fonction constante $h(t) = 5$ est une solution particulière de (1).
2. L'équation caractéristique est : $r^2 + 4 = 0$ de discriminant $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 4 = -16 = -4^2 > 0$, et qui admet donc deux racines complexes conjuguées : $r_1 = 2j$ et $r_2 = -2j$.
   La solution générale s'écrit donc, $g(t) = A\cos(2t) + Be\sin(2t)$. où A et B sont des nombres réels quelconques.
3. La solution de (1) s'écrit donc $f(t) = g(t) + h(t) = A\cos(2t) + Be\sin(2t) + 5$.
   De plus, $f(0) = A + 5 = 0$ et $f'(0) = 2B = 0$, d'où $B = 0$, et donc $A = -5$.
   Ainsi $f(t) = -5\cos(2t) + 5 = 5(1 - \cos(4t))$.

Exercice 1 *BTS, Groupement A1, 2007* **8 points**

1. (a) $$|T(\omega)| = \left|\dfrac{i\omega k}{1 - i\dfrac{\omega}{2}}\right| = \dfrac{|i\omega k|}{\left|1 - i\dfrac{\omega}{2}\right|} = \dfrac{\omega k}{\sqrt{1^2 + \left(\dfrac{\omega}{2}\right)^2}} = \dfrac{\omega k}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2}{4}}}$$

   (b) $r(\omega) = |H(\omega)| = |(T(\omega))^3| = |(T(\omega))|^3 = \dfrac{(\omega k)^3}{\left(1 + \dfrac{\omega^2}{4}\right)^{3/2}}$

2. (a) $\arg\left((i\omega k)^3\right) = 3\arg(i\omega k)$, or $\omega > 0$ et $k > 0$, et donc, $\arg\left((i\omega k)^3\right) = 3\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

   Un argument θ de $1 - i\dfrac{\omega}{2}$ est tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + \dfrac{\omega^2}{4}}}$ et $\sin\theta = \dfrac{-\dfrac{\omega}{2}}{\sqrt{1^2 + \dfrac{\omega^2}{4}}}$.

   Ainsi, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{-\dfrac{\omega}{2}}{1} = -\dfrac{\omega}{2}$, d'où $\theta = \arctan\left(-\dfrac{\omega}{2}\right) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$.
   On a alors,
   $$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg\left((H(\omega))^3\right) = 3\arg\left(H(\omega)\right) = 3\arg\left(\dfrac{i\omega k}{1 - i\dfrac{\omega}{2}}\right) \\ &= 3\left(\arg\left(i\omega k\right) - \arg\left(1 - i\dfrac{\omega}{2}\right)\right) = 3\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \dfrac{3\pi}{2} - 3\theta = \dfrac{3\pi}{2} + 3\arctan\left(\dfrac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

   (b) $$\varphi'(\omega) = 0 + 3\dfrac{\dfrac{1}{2}}{1 + \left(\dfrac{\omega}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{\omega}{2}\right)^2}$$

   On a donc, pour tout $\omega > 0$, $\varphi'(\omega) > 0$.

   (c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \arctan(x) = 0$, et donc, $\lim\limits_{\omega \to 0^+} \varphi(\omega) = \dfrac{3\pi}{2} + 3\lim\limits_{\omega \to 0^+} \arctan\left(\dfrac{\omega}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$

   De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$, et donc, $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = \dfrac{3\pi}{2} + 3\dfrac{\pi}{2} = 3\pi$.

ω	0		$+\infty$
$r'(\omega)$		$+$	
$r(\omega)$	0	$\nearrow$	$8k^3$
$\varphi(\omega)$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	3π
$\varphi'(\omega)$		$+$	

4. **Dans cette dernière question, on se place dans le cas où $\mathbf{k = 0,9}$.**
   (a) Voir annexe 1.
   (b) ω_0 est tel que $r(\omega_0) = |H(\omega_0)| = 1$, soit,

$$r(\omega_0) = \frac{(\omega_0 k)^3}{\left(1+\dfrac{\omega_0^2}{4}\right)^{3/2}} = 1 \iff (\omega_0 k)^3 = \left(1+\frac{\omega_0^2}{4}\right)^{3/2} \iff \omega_0 k = \left(1+\frac{\omega_0^2}{4}\right)^{1/2}$$

$$\iff (\omega_0 k)^2 = 1 + \frac{\omega_0^2}{4} \iff \left(k^2 - \frac{1}{4}\right)\omega_0^2 = 1$$

$$\iff \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{k^2 - \dfrac{1}{4}}} \simeq 1,34 \quad \text{car} \quad \omega_0 > 0$$

et,

$$\varphi(\omega_0) = \frac{3\pi}{2} + 3\arctan\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \simeq 6,48\ [2\pi] \simeq 6,48 - 2\pi\ [2\pi] \simeq 0,20\ [2\pi]$$

Exercice 2 *BTS, Groupement A1, 2010* **9 points**

1. $h(t) = f(t) - g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si, } 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ 0 & \text{si, } \tau \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases}$, voir la représentation graphique sur le document réponse 2.
2. (a) $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\tau} 1\,dt + \int_{\tau}^{2\pi} 0\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}\Big[\,t\,\Big]_0^{\tau} = \frac{\tau}{2\pi}$
   (b)

$$\int_0^{\tau} \cos(nt)\,dt = \left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\tau} = \frac{1}{n}\sin(n\tau)$$

Comme

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T h(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

avec, $T = 2\pi$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1$, soit

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\tau} \cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\sin(n\tau) = \frac{1}{n\pi}\sin(n\tau).$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T h(t)\,sin(n\omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\tau \sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^\tau = \frac{1}{n\pi}(1-\cos(n\tau)).$$

3. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$\begin{aligned} A_n^2 &= \frac{a_n^2+b_n^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2\pi^2}\sin^2(n\tau) + \frac{1}{n^2\pi^2}\left(1-\cos(n\tau)\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2n^2\pi^2}\left(\sin^2(n\tau) + 1 + \cos^2(n\tau) - 2\cos(n\tau)\right) \end{aligned}$$

or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^x + \sin^2 x = 1$, et donc,

$$A_n^2 = \frac{1}{2n^2\pi^2}\left(2 - 2\cos(n\tau)\right) = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(1-\cos(n\tau)\right)$$

et donc,

$$A_n = \frac{1}{n\pi}\sqrt{1-\cos(n\tau)}.$$

On suppose, pour toute la suite de l'exercice, que $\tau = \frac{\pi}{4}$.

4. Voir document réponse n° 3.
5. (a) La valeur efficace h_{eff} de la fonction h est telle que :

$$h_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[h(t)]^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\tau 1\,dt = \frac{\tau}{2\pi} = \frac{1}{8}$$

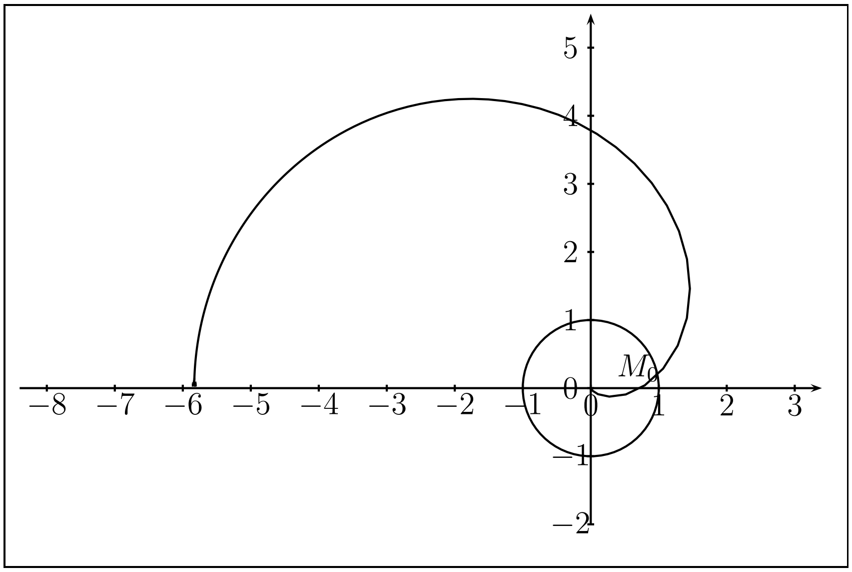
(b) Pour tout $\tau \in [0;2\pi]$, $-1 \leqslant \cos(n\tau) \leqslant 1$, et on a donc, $-1 \leqslant -\cos(n\tau) \leqslant 1$, d'où, $0 \leqslant 1-\cos(n\tau) \leqslant 2$.

La série $P = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n^2$, est une série de terme général positif $A_n^2 = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(1-\cos(n\tau)\right)$.

On a donc, d'apès l'encadrement précédent $A_n^2 \leqslant \frac{2}{n^2\pi^2}$. Or, la série de terme général $u_n = \frac{2}{n^2\pi^2}$ est une série convergente (série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = 1$).
Ainsi, par comparaison de série à termes positifs, la série de terme général A_n^2 est aussi convergente.

(c) $P_3 = \sum_{n=0}^{3} A_n^2 = A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \simeq 0,0764$.

(d) $\frac{P_3}{h_{\text{eff}}^2} \simeq 0,61$.



Document réponse n° 2, à rendre avec la copie (exercice 1)

Figure 1 : courbe représentative de f

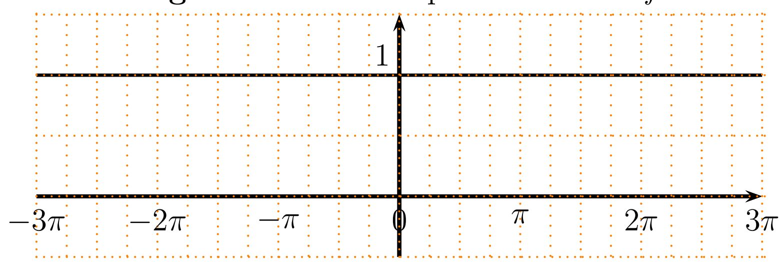


Figure 2 : courbe représentative de g

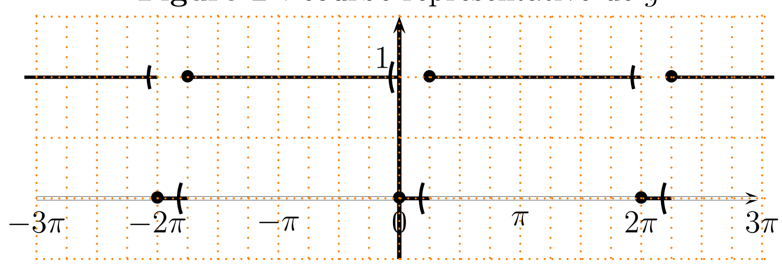
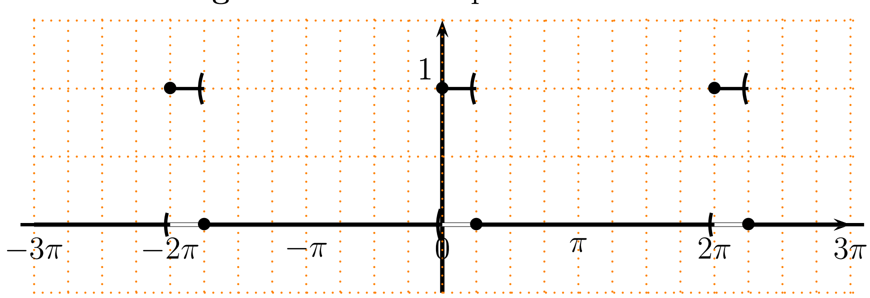


Figure 3 : courbe représentative de h



Document réponse n° 3, à rendre avec la copie (exercice 1)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
A_n	0,12500	0,17227	**0,15915**	0,13863	**0,11254**	0,08318	0,05305	0,02461

n	8	9	10	11	12	13	14	15
A_n	0	0,01914	0,03183	0,03781	**0,03751**	0,03199	0,02274	0,01148