Exercice 1 **6 points**

Soit les nombres complexes $a = 4+4j$; $b = 3-\sqrt{3}j$ et $z = \dfrac{a^3}{b^4}$.

1. $|a| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{2\times 4^2} = 4\sqrt{2}$

   $\theta_a = \arg(a)$ est tel que $\left\{\begin{array}{l} \cos(\theta_a) = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_a) = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$ et donc, $\theta_a = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

   $|b| = \sqrt{3^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

   $\theta_b = \arg(b)$ est tel que $\left\{\begin{array}{l} \cos(\theta_b) = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_b) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ et donc, $\theta_b = -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

2. On a donc, d'après la question précédente, $a = 4\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$ et $b = 2\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}$,

   d'où $z = \dfrac{a^3}{b^4} = \dfrac{\left(4\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^3}{\left(2\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}\right)^4} = \dfrac{4^3\sqrt{2}^3e^{j\frac{3\pi}{4}}}{2^4\sqrt{3}^4e^{-j\frac{4\pi}{6}}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{9}e^{j\frac{17\pi}{12}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{9}\left(\cos\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)+j\sin\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)\right)$

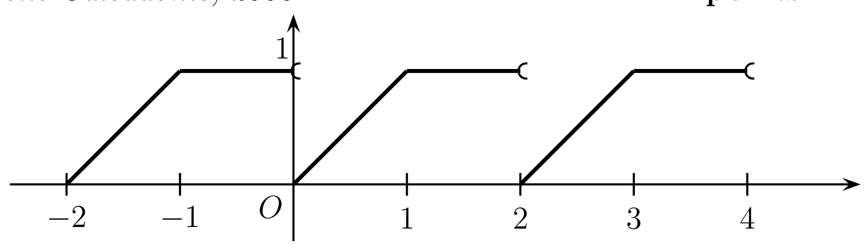
3. Soit, dans un repère du plan complexe, les points A et B d'affixes a et b.

   $AB = |b-a| = \left|-1-j\left(\sqrt{3}+4\right)\right| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}+4\right)^2} = \sqrt{20+8\sqrt{3}} = 2\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

Exercice 2 *BTS, Groupement A1, Nouvelle Caléadonie, 2006* **14 points**

1. φ est 2-périodique avec :

   $\left\{\begin{array}{lcll} \varphi(t) & = & t & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ \varphi(t) & = & 1 & \text{si } 1 \leqslant t < 2\pi \end{array}\right.$



2. a. $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \varphi(t)\,dt = \dfrac{1}{2}\left(\int_0^1 t\,dt + \int_1^2 1\,dt\right) = \dfrac{1}{2}\left(\left[\dfrac{1}{2}t^2\right]_0^1 + [t]_1^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-0+2-1\right) = \dfrac{3}{4}$

   b. $\mu_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T [\varphi(t)]^2\,dt = \dfrac{1}{2}\left(\int_0^1 t^2\,dt + \int_1^2 1^2\,dt\right) = \dfrac{1}{2}\left(\left[\dfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 + [t]_1^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-0+2-1\right) = \dfrac{2}{3}$

   Ainsi, $\mu_{\text{eff}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

3. On a $T = 2$ d'où $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$, et donc

   $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \varphi(t)\cos(n\omega t)\,dt = \int_0^2 \varphi(t)\cos(n\pi t)\,dt = \int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt + \int_1^2 \cos(n\pi t)\,dt$

   On intègre la première intégrale par partie, en posant $u = t$, donc $u' = 1$, et $v' = \cos(n\pi t)$ donc $v = \dfrac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \left[\frac{\quad}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]_0 - \frac{\quad}{n\pi}\int_0 \sin(n\pi t)\,dt + \left[\frac{\quad}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]_1 \\
&= \frac{1}{n\pi}\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - 0 - \frac{1}{n\pi}\left[\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi t)\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} - \frac{1}{n\pi}\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi) - \cos(0)\right) = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right)
\end{aligned}$$

4. $S(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right)\cos\left(n\pi t\right)$

   φ est CM^1 : continue et dérivable par morceaux, et vérifie donc les conditions de Dirichlet. Ainsi, pour tout t où φ est continue on a $S(t) = \varphi(t)$.

   Par contre φ n'est pas continue en -2, 0, 2, …

   En ces points $t = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, on n'a pas $S(t) = \varphi(t)$, mais $S(t) = \dfrac{1}{2}\left(\varphi(t^-) + \varphi(t^+)\right) = \dfrac{1}{2}$.