Equations différentielles

Exercice 1 Soit l'équation différentielle : $(E): \ 3y' + 2y = -6$.

1. Déterminer la fonction h, constante sur $\mathbb{R}$, solution de (E).
2. Ecrire l'équation homogène (sans second membre) associée à (E).
   Déterminer sa solution générale.
3. En déduire la solution générale de l'équation (E).
4. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle : $(E): \ y'' + 2y' - 3y = (6 + 5t)\, e^{2t}$.

1. Montrer que la fonction définie par $f(t) = te^{2t}$ est solution de (E).
2. Ecrire l'équation homogène (E_0) (sans second membre) associée à (E).
   Déterminer la solution générale f_0 de (E_0).
3. En déduire l'expression de la solution générale de (E).
4. Déterminer l'expression de la fonction y solution de (E) vérifiant de plus $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Transformée de Laplace

Exercice 3 On considère l'équation différentielle : $(E) \ : \ y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = e(t)$,

où la fonction e est définie par $e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$, et y vérifie $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

On admet que la fonction y solution de (E) admet une transformée de Laplace que l'on notera $Y(p)$.

1. En appliquant la transformée de Laplace à (E), déterminer la fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{Y(p)}{E(p)}$.
2. Donner alors l'expression de $Y(p)$, et en déduire $y(t)$.

Exercice 4 Déterminer la fonction $y(t)$ dont la transformée de Laplace est $Y(p) = \dfrac{3}{p^2 + 4p + 8}$.

Transformée en z

Exercice 5 On considère une suite $(y(n))$ définie par l'équation aux différences (ou équation récurrente) : $(E) \ : \ y(n+2) + 3y(n+1) - 4y(n) = e(n)$,

où la suite $e(n)$ est définie par $e(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$, et avec $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

On admet que la suite $(y(n))$ solution de (E) admet une transformée en z que l'on notera $Y(z)$.

1. En appliquant la transformée en z à (E), déterminer la fonction de transfert : $H(z) = \dfrac{Y(z)}{E(z)}$.
2. Donner alors l'expression de $Y(z)$, et en déduire $y(n)$.

Probabilités

Exercice 6 Une société fabrique des poutrelles métalliques dans deux usines A et B. En une semaine, elle fabrique 7 500 poutrelles, parmi lesquelles certaines sont défectueuses.

L'usine A en a fabriqué 3 000, dont 1% sont défectueuses et l'usine B a fabriqué le reste, dont 6% sont défectueuses. On prend au hasard une poutrelle dans la production.

1. Calculer la probabilité des événements suivants : A : "la poutrelle provient de l'usine A" ;
   B : "la poutrelle provient de l'usine B" ; D : "la poutrelle est défectueuse"
2. Calculer la probabilité qu'une poutrelle prise au hasard provienne de l'usine A sachant qu'elle est défectueuse.

pour un client. On assimile le tirage des 500 poutrelles à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de poutrelles défectueuses dans le lot.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) On approxime cette loi par une loi normale. Déterminer son espérance et son écart type.

c) Le lot est considéré acceptable par le client lorsqu'il contient moins de 2% de pièces défectueuses. Déterminer alors la probabilité que le lot soit acceptable par le client.

Exercice 7 Un archer a une probabilité d'atteindre la cible de 4/5 lorsqu'il tire une flèche. Il tire 6 flèches. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de flèches ayant atteint la cible.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer la probabilité pour qu'il atteigne 2 fois la cible.
3. Déterminer la probabilité pour qu'il atteigne au moins deux fois la cible.
4. Déterminer, et interpréter, $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 8 *Nouvelle Calédonie 2009*

Partie A : Une entreprise fabrique des pièces en grande série.

Une pièce est conforme si sa masse, en grammes, est comprise entre 7,495 et 7,505.

L'entreprise dispose d'une machine de contrôle des pièces fabriquées.

On prélève une pièce au hasard dans la production. On note C l'événement : « la pièce est conforme », et A l'événement : « la pièce est acceptée par la machine de contrôle ».

Une étude statistique a été conduite, au terme de laquelle on a pu estimer que :

$$p(A) = 0,95,\ p\left(C \cap \overline{A}\right) = 0,01 \text{ et } p\left(\overline{C} \cap A\right) = 0,005.$$

1. (a) À l'aide d'une phrase, donner la signification des événements $C \cap \overline{A}$ et $\overline{C} \cap A$.
   Ces deux événements correspondent aux cas où la machine de contrôle commet une erreur.

   (b) Calculer la probabilité que la machine de contrôle commette une erreur.
2. Calculer la probabilité qu'une pièce soit conforme, sachant qu'elle est refusée.

Partie B : On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la masse d'une pièce en grammes. On admet que X suit une loi nonnale de moyenne 7,5 et d'écart type σ où σ désigne un nombre réel strictement positif.

1. Après une période de production, la machine de fabrication a subi un dérèglement brutal.
   L'écart type σ vaut alors $0,015$.
   On rappelle qu'une pièce est confonne si sa masse, en grammes, est comprise entre 7,495 et 7,505.
2. Calculer la probabilité qu'une pièce soit conforme.
3. Calculer la valeur de σ pour laquelle la probabilité qu'une pièce soit conforme est égale à $0,99$.
4. Dans cette question, on suppose que σ vaut 0,002 et qu'à la suite d'un nouveau dérèglement, la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $7,502$ et d'écart type $0,002$.
   Calculer la probabilité qu'une pièce, choisie au hasard, soit conforme.

Partie C : Les pièces acceptées par la machine de contrôle sont emballées par lots de 100. On prélève au hasard un lot. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 pièces.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 100 pièces, associe le nombre de pièces non conformes.

On admet que la probabilité qu'une pièce soit non conforme, sachant qu'elle a été acceptée, est 0,0053.

(b) Donner l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y.

2. Calculer la probabilité qu'un lot ne contienne que des pièces conformes. On donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-2} près.

Exercice 9 On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ inconnu telle que : $P(X \leqslant 1) = 0,95$.

1. Démontrer que λ est solution de l'équation : $\ln(1+x) - x = \ln(0,95)$.
2. Etudier les variations de la fonction φ définie sur $[0;+\infty[$ par : $\varphi(x) = \ln(1+x) - x$.
   En déduire que l'équation de la question 1 admet une unique solution λ dans $[0;+\infty[$, dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.
3. Calculer la probabilité : $P(X \leqslant 2)$.

Exercice 10 *(Optionnel)*
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie d'un composant. On admet que X suit une loi de durée de vie sans viellissement, ou encore loi exponentielle dont la fonction de répartition est celle de la loi exponentielle : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.
Soit a et h deux réels positifs. Montrer que la probabilité $P_{X>a}(X > a+h)$ ne dépend pas de a.

Séries de Fouriers

Exercice 11 Soit f la fonction de période 1 définie par $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} \leqslant t < 1 \end{cases}$.

1. Représenter graphiquement f sur $[-2;2]$.
2. Calculer la valeur moyenne de f sur une période.
3. Déterminer les coefficients a_n et b_n de la série de Fourier de f.
4. Calculer la valeur efficace f_{eff} de f, donnée par $f_{eff}^2 = \displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt$.
5. Calculer f_{eff} en utilisant la formule de Parseval tronquée aux deux premiers harmoniques de la série de Fourier de f.

Exercice 12 Soit f la fonction 2-périodique définie par $f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si} \quad -1 \leqslant t \leqslant \\ -t+1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$.

1. Représenter graphiquement f sur $[-4;4]$.
2. Calculer la valeur moyenne de f sur une période.
3. Déterminer les coefficients a_n et b_n de la série de Fourier de f.
4. Calculer la valeur efficace f_{eff} de f, donnée par $f_{eff}^2 = \displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt$.

Exercice 13 *(Optionnel)*
Soit f la fonction paire, 2-périodique définie par $f(t) = e^t$ pour $t \in [0;1]$.

1. Représenter graphiquement f sur $[-3;3]$.
2. Calculer la valeur moyenne de f sur une période.
3. Déterminer les coefficients a_n et b_n de la série de Fourier de f.