Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x - 1$.

1. Etudier les variations de f (préciser les limites).
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0;1]$.
   Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Tracer la représentation graphique de f.

Exercice 2
Partie A. Soit g la fonction numérique définie sur $I =]0;+\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1. Etudier le sens de variation de g sur I (préciser les limites).
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur I.

Partie B. Soit f la fonction numérique définie sur I par $f(x) = -x + 2 + \dfrac{\ln x}{x}$.
On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Etudier les limites de f aux bornes de I.
2. Calculer $f'(x)$ et, à l'aide la partie A, donner le signe de $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f.
3. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
   Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.
4. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un ayant une abscisse a supérieure à 2. Donner une valeur approchée de a à 10^{-2} près en indiquant la méthode employée.
5. Tracer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \ln\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$.
On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Etudier la limite de f en 2. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Etudier la limite de f en $+\infty$.
   Monter que la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$, et étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x(x-2)}$, puis dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dont on donnera une valeur approchée à $0,1$ près.
5. Tracer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, paire et π-périodique, par : $f(t) = \dfrac{\pi}{2}t$, pour $t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormal sur $[-\pi\,;\,\pi]$.
2. Calculer les coefficients de la série de Fourier S de f.
3. Calculer la valeur efficace f_e de la fonction f.
4. Ecrire la formule de Parseval pour la fonction f et sa série de Fourier.
   Calculer une valeur approchée de la valeur efficace de la fonction f en ne conservant que les 3 premiers harmoniques de la série de Fourier.

Exercice 5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, impaire et périodique de période 2π, définie sur $[0;1]$ par :

$$f(t) = t^2\ , \quad \textit{pour}\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

1. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormal sur $[-5\,;\,5]$.
2. Calculer la valeur moyenne de f.
3. Calculer les coefficients de la série de Fourier S de f, et écrire la série de Fourier S.
   A-t-on $S(t) = f(t)$?