I - Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition *Soit une expérience aléatoire et soit Ω l'univers et P une probabilité sur cet univers. On appelle variable aléatoire réelle (v.a.r) définie sur Ω toute fonction X de Ω sur $\mathbb{R}$*

Remarque : La terminologie est des plus malheureuses !

— une variable aléatoire n'est pas une variable, mais une fonction

— une variable aléatoire n'est pas aléatoire, mais complétement déterminée.

Définition *La loi de probabilité de la v.a.r X est la fonction qui, à chaque valeur x_i prise par X, associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, événement composé de tous les antécédents de x_i par X.*

Exercice 1 Marouane et Fernando jouent au jeu suivant : Fernando lance une pièce de monnaie "normale" et Marouane gagne 10 euros si le résultat est pile et perd 5 euros si le résultat est face. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique (gain ou perte) de Marouane après le lancer. Donner la loi de probabilité de X.

II - Espérance mathématique et écart-type

Définition *Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs x_i avec la probabilité $p_i = p(X = x_i)$. L'espérance mathématique de la variable aléatoire réelle X est le nombre noté $E(X)$ tel que :*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i = \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) \times x_i$$

C'est une sorte de moyenne espérée de la v.a.r.
Lorsque $E(X) = 0$, on dit que le jeu est équitable.

Exercice 2 Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire du jeu précédemment décrit.

Exercice 3 Une urne contient six boules, trois noires et trois rouges. On tire au hasard deux boules simultanément et on note leur couleur.
X est la variable aléatoire associant à chaque tirage le nombre de boules rouges obtenues.

1. Montrer qu'il y a 15 tirages possibles.
2. Etablir la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

Exercice 4 Une machine à sous au casino se compose de 3 tambours cylindriques. Sur chacun d'eux peut apparaître de façon aléatoire et équiprobable l'un des quatres symboles : un 7, un citron, un kiwi, ou une banane.

1. Quel est le nombre total de combinaisons que l'on peut obtenir ?

   On mise au départ 5 € :
   — si trois 7 apparaissent, on gagne vingt fois la mise de départ ;
   — si trois fruits identiques apparaissent, on gagne dix fois la mise départ ;
   — si deux 7 seulement apparaissent, on gagne deux fois la mise de départ ;
   — dans tous les autres cas, on ne gagne rien.

2. On dispose d'une somme de départ de 200 €. Combien peut-on espérer gagner ?

augmentée de ce nombre.
Si on multiplie par un même nombre toutes les valeurs prises par X, la moyenne espérée sera multipliée par ce nombre.
En d'autres termes, pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $E(aX+b) = aE(X)+b$.

Définition *Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs x_i avec la probabilité p_i. La variance de la variable aléatoire réelle X est le nombre noté $V(X)$ tel que :*

$$V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$$

Et l'écart type de X est le nombre noté $\sigma(X)$ tel que :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Ce sont deux notions qui servent à apprécier la dispersion des valeurs prises par la variable aléatoire.
Dans un jeu cela mesure les "risques" (en gain ou en perte) pris par le joueur.

Propriété $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Exercice 5 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$0,1$	$0,2$	$0,25$	$0,05$		$0,15$

1) Calculer $p(X > 0)$
2) Calculer l'espérance mathématique de X, sa variance et son écart type.

Exercice 6 On considère les deux jeux suivants :

a) On lance une pièce et on gagne 1 euro si on obtient face et on perd 1 euro si on obtient pile.
b) On lance une pièce et on gagne 1 000 000 euro si on obtient face et on perd 1 000 000 euro si on obtient pile.

Ces jeux sont-ils équitables ? Lequel des deux est le plus "risqué" ?

Propriété *Soit $a \in \mathbb{R}$, alors* $V(aX+b) = a^2 V(X)$, *et donc,* $\sigma(aX) = |a|\,\sigma(X)$.

III - Loi binomiale

1) Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition Loi de Bernoulli[1]
Une épreuve de Bernoulli est une expérience alétoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée succès et de probabilité p, l'autre appelée échec et de probabilité $1-p$.
La loi de probabilité est alors appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

issue	*succès*	*échec*
probabilité	p	$1-p$

Exemple : On lance un dé cubique équilibré. On appelle succès l'événement : S "un six est obtenu". Sa probabilité est $p = \frac{1}{6}$.
On obtient la loi de Bernouilli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

issue	succès	échec
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Un schéma de Bernouilli est la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (c'est-à-dire que l'issue d'une épreuve ne dépend pas des issues des épreuves précédentes).

.

Exercice 7 On lance un dé cubique équilibré 3 fois de suite. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'événement S : "obtenir un six" est réalisé.

1. Dresser un arbre pondéré et déterminer la loi de probabilité de X.
2. Mêmes questions si on lance cette fois 4 fois de suite le dé.
2. Mêmes questions si on lance cette fois 5 fois de suite le dé.

Propriété Loi binomiale

On considère un schéma de Bernouilli constitué de n épreuves indépendantes, et on note X la variable aléatoire qui, à chaque liste de n résultats associe le nombre de succès.

Alors, pour tout entier k, avec $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée **loi binomiale de paramètres** n **et** p*, et est notée $\mathcal{B}(n;p)$.*

Démonstration: Chaque liste formée de n succès, et donc de $n-k$ échecs, a pour probabilité : $p^k(1-p)^{n-k}$.

Il y a C_n^k telles listes, le nombre de façons différentes de choisir la position des k succès. □

Remarque : La probabilité d'obtenir un nombre quelconque de succès est :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = P(X=0)+P(X=1)+\ldots+P(X=n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1$$

d'après la formule du binôme.

Propriété *Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors*

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq = np(1-p).$$

Exercice 8 Un élève répond au hasard aux 10 questions d'un QCM. Pour chaque question, 5 réponses sont proposées dont une seule est exacte. X est la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

1. Montrer que la loi de probabilité de X est une loi binomiale.
2. Calculer la probabilité d'avoir au moins 5 bonnes réponses.
3. Calculer l'espérance mathématique du nombre de bonnes réponses.

1. Jacques ou Jakob Bernoulli (27 décembre 1654, Bâle - 16 août 1705) est un mathématicien et physicien suisse, frère de Jean Bernoulli et oncle de Daniel Bernoulli et Nicolas Bernoulli.
Né à Bâle en 1654, il rencontre Robert Boyle et Robert Hooke lors d'un voyage en Angleterre en 1676. Après cela, il se consacre à la physique et aux mathématiques. Il enseigne à l'université de Bâle à partir de 1682, devenant professeur de mathématiques en 1687. Il mérita par ses travaux et ses découvertes d'être nommé associé de l'Académie des sciences de Paris (1699) et de celle de Berlin (1701).
Sa correspondance avec Gottfried Leibniz le conduit à étudier le calcul infinitésimal en collaboration avec son frère Jean. Il fut un des premiers à comprendre et à appliquer le calcul différentiel et intégral, proposé par Leibniz, découvrit les propriétés des nombres dits depuis nombres de Bernoulli et donna la solution de problèmes regardés jusque-là comme insolubles.

le cas échéant les valeurs des paramètres de la loi binomiale associée.

1. On lance 5 fois successivement un dé à jouer non truqué, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de 2 obtenus parmi ces lancers.
2. On lance 5 fois successivement un dé à jouer non truqué, et on note X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer pour lequel on obtient le chiffre 6.
3. On lance 10 fois successivement 2 dés à jouer non pipés, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où une somme de 10 est obtenue en ajoutant les chiffres des 2 dés.
4. Une branche présente 10 fleurs blanches ou roses réparties au hasard. On compte au total 2 fleurs blanches et 8 fleurs roses.
   On cueille successivement et au hasard 3 fleurs, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fleurs blanches cueillies.

Exercice 10

Des études statistiques montrent que lors d'une naissance, la probabilité d'avoir un garçon est d'environ 0,51. On choisit au hasard une famille de quatre enfants où les fécondations sont supposées indépendantes et on s'intéresse au nombre de garçons.

1. Justifier que cette situation peut-être modélisée par une loi de binomiale.
2. Calculer la probabilité que cette famille compte au moins un garçon.

Exercice 11 Les deux questions sont indépendantes. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.
   a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
      E_1 : "Les boules sont toutes de couleurs différentes" ;
      E_2 : "Les boules sont toutes de la même couleurs".
   b) On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules, associe le nombre de boules bleues tirées.
      Etablir la loi de probabilité de X, et calculer son espérance mathématique.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
   On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant. On effectue ainsi k tirages successifs.

   Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des rouges ?

2) Loi binomiale : domaine d'application

Soit A un événement lié à une épreuve aléatoire ne donnant que deux résultats possibles :

- succès de probabilité p
- échec de probabilité 1-p

On a alors un schéma de Bernoulli. Si on réalise n fois cette épreuve de manière indépendante alors la v.a.r X donnant le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.

<u>Remarque :</u> Lorsque les tirages sont avec remise, les tirages sont indépendants, mais lorsqu'il n'y a pas remise, les tirages sont dépendants.
Cependant, lorsque la population de base est très grande, les résultats sont quasiment les mêmes que l'on considère les tirages avec remise ou sans.
On considère alors que la loi binomiale s'applique.

1) Définition

Définition *Une v.a.r X suit une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$) si pour tout entier naturel k, sa loi de probabilité est donnée par*

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Exercice 12 On considère le nombre d'appels téléphoniques reçus par un standard pendant une heure.
On a remarqué que :

- Il est rare de recevoir deux appels en même temps.
- Le nombre moyen d'appels pendant une période de temps T ne dépend que de la durée T.
- Les appels sont indépendants les uns des autres.

Ces conditions permettent de dire que le nombre d'appels téléphoniques reçus au standard durant une heure est donné par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10$.
Calculer la probabilité que le nombre d'appels soit de 3 ;7 ;10 ;16 ;29 ; inférieur à 3 ; inférieur à 10.

2) Domaine d'application

Les conditions requises sont celles de l'exemple précédent :

- Il est très rare d'avoir deux succès simultanément.
- Le nombre moyen de succès pendant une période de temps T ne dépend que de la durée T.
- L'arrivée d'un succès est indépendante du précédent.

3) Espérance mathématique et écart type

Propriété *Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ alors*

$$E(X) = \lambda \qquad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

V - Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Théorème *Si on pose $np = m$, on a alors*

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{m}{n}\right)^k \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-k}$$

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k \left(\frac{m}{n}\right)^k \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-k} = e^{-m}\frac{m^k}{k!}$$

La loi de Poisson apparait comme la loi limite de la loi binomiale dans les conditions définies ci-dessus.

Conséquence
Lorsque p est petit ($p \leq 0,1$), n grand ($n \geq 30$) et le produit np pas trop grand ($np \leq 10$), on peut approcher les probabilités associées à la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ par celles obtenues avec la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$

1. Siméon Denis Poisson (21 juin 1781 à Pithiviers - 25 avril 1840 à Sceaux) est un mathématicien, géomètre et physicien français, èlève de Laplace.

hasard.
Le nombre de pièces dans le stock est assez important pour que l'on puisse considérer le tirage comme étant avec remise.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses.
Calculer la probabilité d'obtenir 1 ; 2 ;... ;7 pièces défectueuses avec d'une part la loi binomiale et d'autre par la loi de Poisson.

Exercice 14 La probabilité qu'un voyageur oublie ses bagages dans le train est de 0,005. Un train transporte 850 voyageurs. On admet que ces voyageurs se comportent, vis-à-vis de leurs bagages, indépendamment les uns des autres.
On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de voyageurs ayant oublié leurs bagages dans le train.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Calculer son espérance mathématique et sa variance.
2. Donner une loi de probabilité permettant d'approcher cette loi, et calculer alors une valeur approchée de la probabilité des événements suivants :
   a) aucun voyageur n'a oublié ses bagages.
   b) cinq voyageurs au moins ont oublié leurs bagages.

Exercice 15

1. Une grande enveloppe contient les douze figures d'un jeu de carte : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. On tire, au hasard et simultanément, cinq cartes de l'enveloppe.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus.
   Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique. Interpréter.
2. Dans la même enveloppe, on effectue successivement cinq fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe.
   Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus au cours des cinq tirages.
   Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Exercice 16 Un fournisseur livre deux catégories de câbles C_1 et C_2. Dans chaque livraison figurent 20% de câbles C_1 et 80% de câbles C_2.
Les parties A et B sont indépendantes.
Partie A. On prélève, au hasard, 4 câbles dans une livraison de 50 câbles.

1. Préciser la probabilité de l'événement E :"les 4 câbles sont du type C_1".
2. Préciser la probabilité de l'événement F :"1 câble est du type C_1 et 3 câbles sont du type C_2".
3. Préciser la probabilité de l'événement G :"au moins un câble est du type C_1".

Partie B.
Dans cette partie, on prélève un câble dans une livraison, on note son type et on le remet dans le lot. On réalise n fois cette expérience $\mathcal{E}$ et on note X le nombre de câbles C_1 obtenus.

1. On suppose que $n = 4$. Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.
   a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 câbles de type C_1.
   b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un câble du type C_1.
   c) Calculer l'espérance $E(X)$.
2. Dans cette question, n est inconnu.
   a) Exprimer $P(X \geqslant 1)$ en fonction de n.
   b) Combien de fois faut-il réaliser l'expérience $\mathcal{E}$ pour être sûr à 90% d'obtenir au moins un câble C_1 ?