I - Variable aléatoire continue et loi de probabilité

Dans un ensemble de possibilités, ou univers, $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ une variable aléatoire (v.a.) X prenant les valeurs x_1, x_2, ..., x_n est définie par la donnée des probabilités :

$$p_1 = \text{Prob}(X = x_1) \ ; \quad p_2 = \text{Prob}\,(X = x_2)\,; \dots \ ; \quad p_n = \text{Prob}(X = x_n) \ ,$$

qui vérifient les relations :

$$\text{pour tout entier } i \text{ tel que } 1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 0 \leqslant p_i \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

La correspondance $\{x_i; p_i\}$ est la *loi de probabilité* de X, que l'on présente généralement dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$\text{Prob}(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Si les valeurs possibles de X sont réparties de façon continue sur un intervalle fini ou infini, X est appelée variable aléatoire continue.

Une telle variable est définie lorsque l'on connaît la probabilité pour que X prenne une valeur dans tout intervalle du type $[a; b]$.

On se donne pour cela la fonction dite de *répartition* de X : $F(x) = \text{Prob}(X < x)$, qui permet de calculer pour tout intervalle :

$$\text{Prob}(a < X < b) = \text{Prob}(X < b) - \text{Prob}(X < a) = F(b) - F(a)$$

Si la fonction de répartition F est continue, cas que nous allons particulièrement étudier dans toute la suite, alors F peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \ .$$

La fonction f s'appelle alors la densité de probabilité de X, et se doit de vérifier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$$

Définition *Une variable aléatoire continue réelle est une v.a.r qui peut prendre une infinité de valeurs et non plus un nombre fini de valeurs comme les v.a.r discrètes.*

Exemple : Une v.a.r continue peut représenter par exemple le tirage aléatoire d'un nombre réel dans l'intervalle $[0; 1]$, ou encore la durée de vie d'une machine ou d'un composant.

II - Fonction de répartition

Définition *Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de X, la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = P(X \leq t)$*

Remarque : On s'intéresse à cette fonction de répartition car pour une v.a.r continue, $P(X = t)$ est nulle (voir plus bas).

b) $P(X > t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - F(t)$

c) $P(a < t \leq b) = F(b) - F(a)$

d) $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ *et* $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$

Remarque : La notion de fonction de répartition existe aussi pour les v.a.r discrètes, c'est alors une fonction en escalier.

III - Densité de probabilité

Définition *Une v.a.r continue X est définie par une fonction f, appelée densité de probabilité de la v.a.r continue X, fonction qui est telle que :*

f est définie et positive sur $\mathbb{R}$ (pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$), et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$

Propriété *Soit P une probabilité de densité f, alors* $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(t)dt$ *.*

Propriété *a)* $P(a < X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

b) Pour tout t réel, $P(X = t) = P(t \leqslant X \leqslant t) = \displaystyle\int_t^t f(x)\,dx = 0,$

et donc, $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$

Exercice 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Vérifier que la fonction f définit une densité de probabilité.

Exercice 2 Soit $\lambda = \dfrac{1}{10}$ et f la fonction définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$.

a) Montrer que f est une densité de probabilité. C'est la densité de la «loi exponentielle» de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{10}$.

b) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

c) Une standardiste vient de prendre son travail et attend son premier appel. Nous admettrons que le temps d'attente, exprimé en secondes, du premier appel suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{10}$. Donner la probabilité que la standardiste attende moins de 10 secondes, plus de 30 secondes et entre 20 et 30 secondes.

IV - Espérance mathématique et Variance

Propriété *Dans le cas d'une variable aléatoire continue, si les intégrales généralisées existent alors :*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt \qquad V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (E(X) - t)^2 f(t)\,dt \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exercice 3 En reprenant l'exemple précédent, calculer l'espérance de la v.a.r continue.

1) Définition

Définition *Une v.a.r continue X suit une loi normale de paramètres m et σ ($\sigma > 0$) si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

La loi de probabilité est notée $\mathcal{N}(m;\sigma)$.

Exercice 4 Étude de la fonction f.

a) Comparer $f(m+x)$ et $f(m-x)$. En déduire une caractéristique de la courbe représentative.

b) Donner le tableau de variations de f

c) Donner dans un même repère une représentation graphique de f pour les couples $(m;\sigma)$ suivants

$$(-2.5;0.5)\ ;\quad (0;0.5)\ ;\quad (2;0.5)\ .$$

d) Donner dans un même repère une représentation graphique de f pour les couples $(m;\sigma)$ suivants

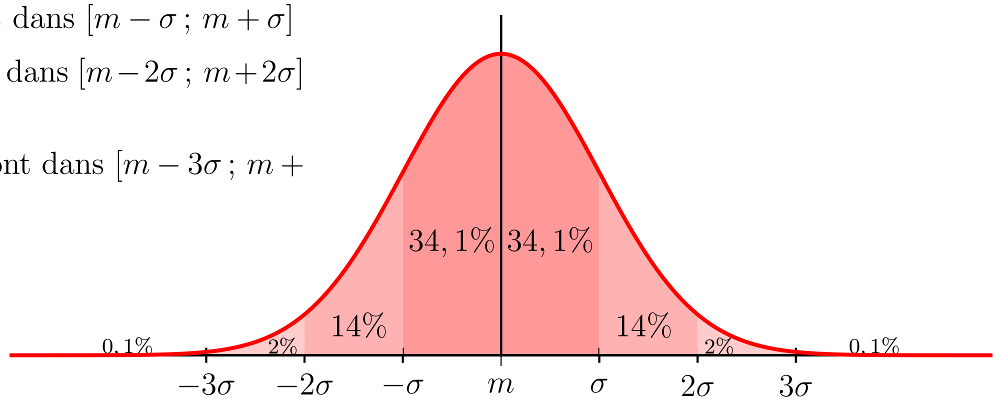
$$(0;0.5)\ ;\quad (0;1)\ ;\quad (0;2)\ ;\quad (0;3)\ .$$

2) Espérance mathématique et écart type

Propriété *Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ alors*

$$E(X) = m \qquad \sigma(X) = \sigma \qquad V(X) = \sigma^2$$

- $\sim 68\%$ des valeurs sont dans $[m-\sigma\,;\,m+\sigma]$
- $\sim 95\%$ des valeurs sont dans $[m-2\sigma\,;\,m+2\sigma]$
- $\sim 99,7\%$ des valeurs sont dans $[m-3\sigma\,;\,m+3\sigma]$



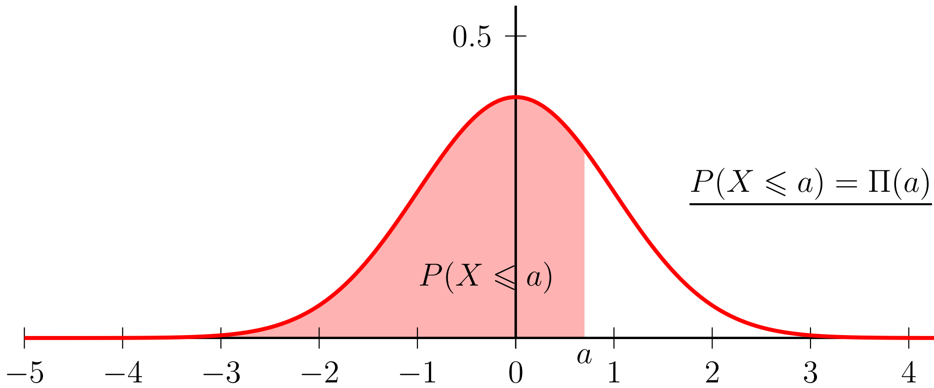
3) Loi normale centrée réduite

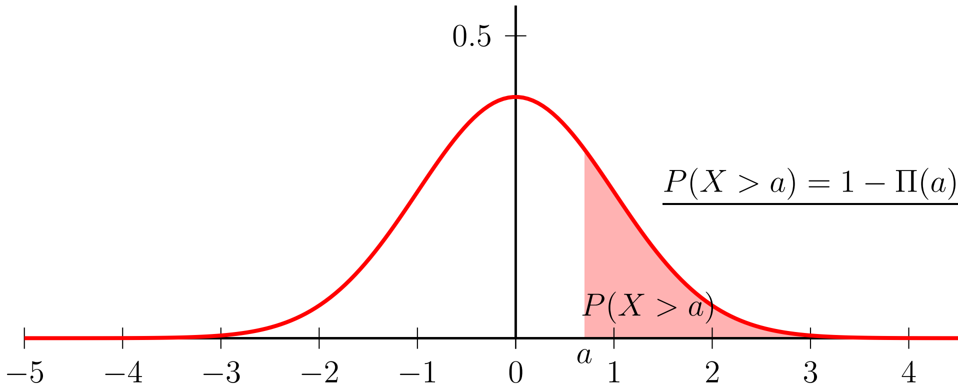
Définition *On appelle loi normale centrée réduite la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.*

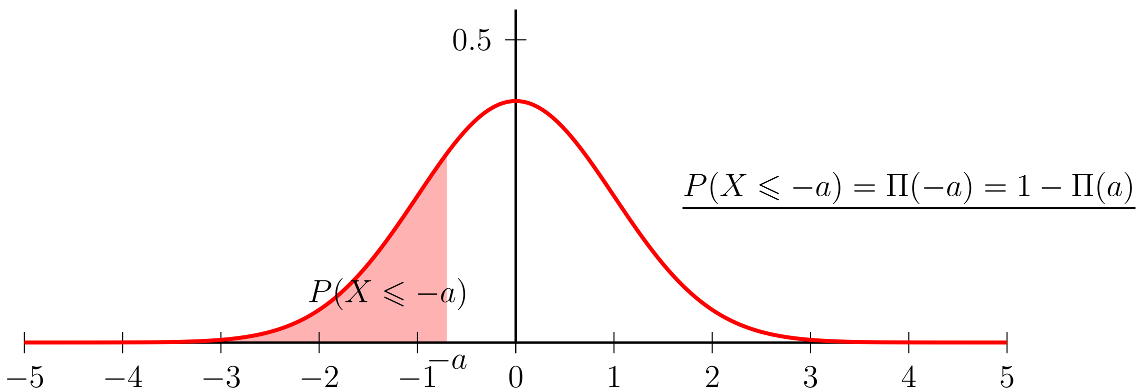
Exercice 5 Donner la fonction de densité d'une v.a.r continue qui suit une loi normale centrée réduite.

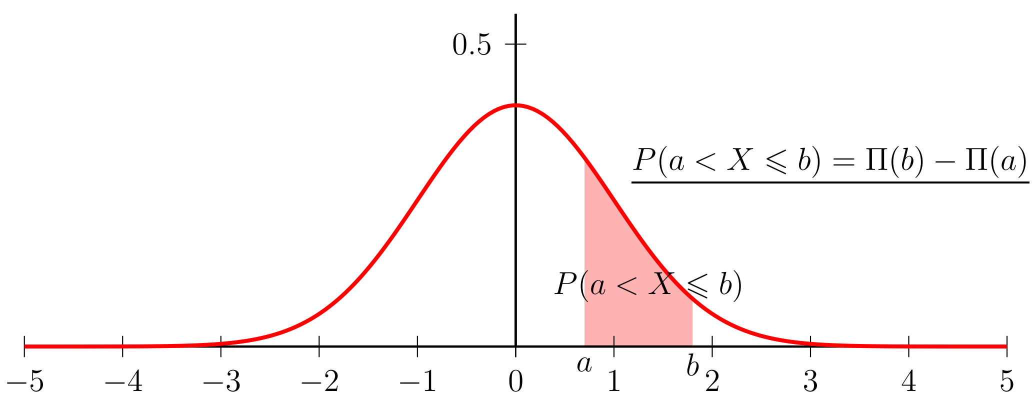
La fonction de répartition de la loi normale réduite se note généralement Π. Ses valeurs peuvent se lire dans une table ou sur une calculatrice.

probabilité, on procède comme ci-dessus, pour $\underline{\underline{a > 0 \text{ et } b > 0}}$.

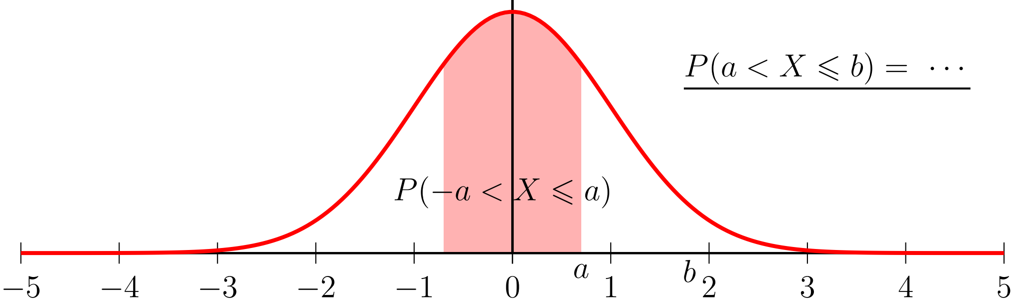








Exercice 6 Exprimer, en utilisant la fonction de répartition Π de la loi normale, la probabilité $P(-a < X \leqslant a)$.



Exercice 7 X est une v.a. suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. Déterminer les probabilités :

a) $P(X < 1,71)$ b) $P(X \leqslant -0,9)$ c) $P(0,61 < X \leqslant 1,2)$ d) $P(-1 \leqslant X < 1)$

Théorème *Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$, alors la variable aléatoire*

$$T = \frac{X - m}{\sigma}$$

suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Exercice 8 X est une v.a. dont la loi de probabilité est la loi normale $\mathcal{N}(15;2)$.

En utilisant la v.a. $T = \dfrac{X-15}{2}$ et la table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, calculer :

a) $P(X < 16)$ b) $P(X > 17)$ c) $P(X \geqslant 14)$ d) $P(10 < X < 20)$

e) $P(-10 < X \leqslant 20)$ f) $P(13 \leqslant X \leqslant 17)$ g) $P(-25 \leqslant X \leqslant -20)$

Exercice 9 Une machine produit des objets de masse m en grammes. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la masse des objets produits, X suit une loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2.

Calculer les probabilités qu'un objet pèse :

a) moins de 251 g b) plus de 252 g c) entre 246 et 254 g

Exercice 10 Une machine fabrique des condensateurs de capacité 5μF en très grande série.

La variable aléatoire X mesurant leur capacité suit la loi normale de moyenne $m = 4,96\mu$F et d'écart type $\sigma = 0,05\mu$F.

On considère qu'un condensateur est acceptable si sa capacité est comprise entre $4,85\mu$F et $5,15\mu$F.

1. Calculer la probabilité pour qu'un condensateur soit acceptable.
2. La machine est bien réglée si 99% de sa production est acceptable. La machine est-elle bien réglée ?

Exercice 11 Une machine fabrique des pièces circulaires en série. A chaque pièce tirée au hasard, on associe son diamètre x exprimé en millimètre. On définit ainsi une variable aléatoire X. On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 32$ et d'écart type $\sigma = 1$ (en mm).

Pour être utilisable, une pièce doit satisfaire à la norme suivante : $31 \leqslant x \leqslant 33$.

1. Quelle est la probabilité p qu'une pièce soit utilisable ?
2. Le coût de fabrication d'une pièce est noté f. Dans un lot de 100 pièces fabriquées, le coût de fabrication est donc de $100f$, tandis que le nombre de pièces utilisables est seulement de $100p$. Ainsi, le prix moyen de fabrication est : $M = \dfrac{100f}{100p} = \dfrac{f}{p}$.

Pour diminuer le pourcentage de pièces défectueuses, on pourrait utiliser une machine plus moderne : son écart type serait de 0,5 mm, et X suivrait alors la loi normale $\mathcal{N}(32; 0,5)$, mais le coût de fabrication serait alors de $f_2 = 12$ € avec cette nouvelle machine.

b. Calculer pour cette nouvelle machine la probabilité p_2 qu'une pièce soit utilisable.

c. Déterminer le prix de revient moyen M_2 pour cette nouvelle machine. Commenter.

Exercice 12 Une entreprise dispose d'un parc de 25 machines du même type, fonctionnant indépendamment les unes des autres. Au cours d'une journée une machine peut-être en panne ou fonctionner correctement, la probabilité qu'elle tombe en panne étant de 0,035.

1. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de machines tombées en panne un jour donné parmi les 25 utilisées. On admettra que cette variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,035$.

   a. Donner l'espérance mathématique et la variance de X.

   b. Déterminer à 10^{-3} près les probabilités des événements suivants :
   - aucune machine ne tombe en panne un jour donnée ;
   - au moins 2 machines tombent en panne un jour donné.

2. Si une machine tombe en panne au cours d'une journée, on fait appel au service de dépannage qui effectue la réparation pour que la machine soit en service le lendemain. Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le temps de réparation en heures. On admet que Y suit la loi normale de moyenne 3 heures et d'écart type 1,5 heures.

   Déterminer les probabilités des événements suivants :
   - la réparation d'une machine dépasse 6 heures ;
   - la réparation d'une machine dure moins de 1,5 heures.

Exercice 13 *D'après BTS*

Une entreprise fabrique des brioches en grande quantité.

On pèse les boules de pâte avant cuisson. On note X la variable aléatoire qui, à chaque boule de pâte, associe sa masse. On admet que X suit la loi normale de moyenne 700 g et d'écart type 20 g.

1. Seules les boules dont la masse est comprise entre 666 g et 732 g sont acceptées à la cuisson.

   Quelle est la probabilité qu'une boule, prise au hasard dans la production, soit acceptée à la cuisson ?

2. Déterminer le réel positif h afin que l'on ait : $P(700 - h \leqslant X \leqslant 700 + h) \geqslant 0,95$.

3. On admet que 8% des boules sont refusées à la cuisson.

   On prélève au hasard, successivement et avec remise, n boules dans la production. On note Y_n la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de n boules, associe le nombre de boules qui seront refusées à la cuisson. Cette variable aléatoire Y_n suit une loi binomiale.

   a. Dans le cas $n = 10$, calculer la probabilité d'avoir, parmi les 10 boules prélevées, exactement 3 boules refusées à la cuisson.

   b. Dans le cas $n = 50$, on admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_{50} par une loi de Poisson.

   Préciser le paramètre de cette loi de Poisson.

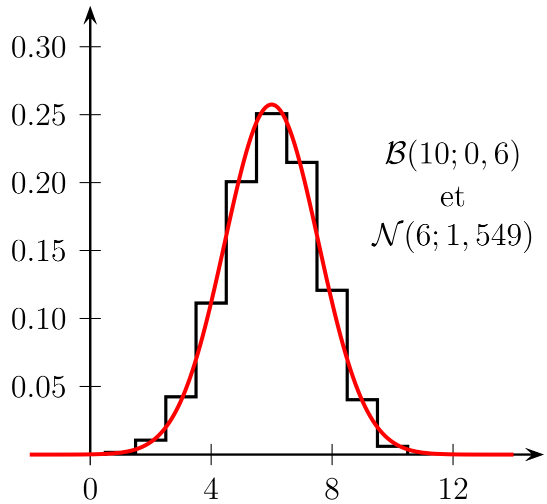
   Calculer alors la probabilité d'avoir, parmi les 50 boules prélevées, exactement 4 boules refusées à la cuisson, puis la probabilité d'avoir au moins 45 boules acceptées à la cuisson.

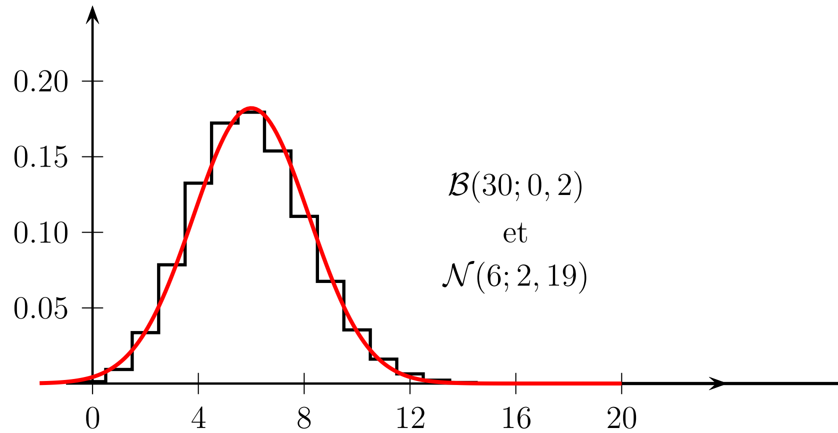
male

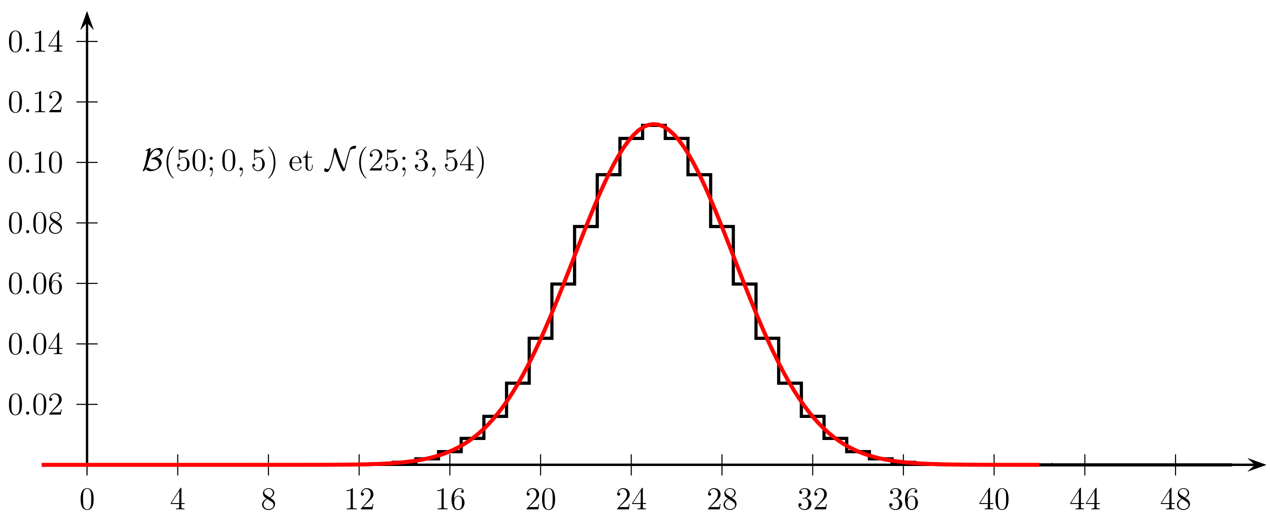
Théorème *Pour n suffisamment grand, on peut remplacer la probabilités associées à la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ par celles de la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ avec $m=np$ et $\sigma=\sqrt{npq}$*

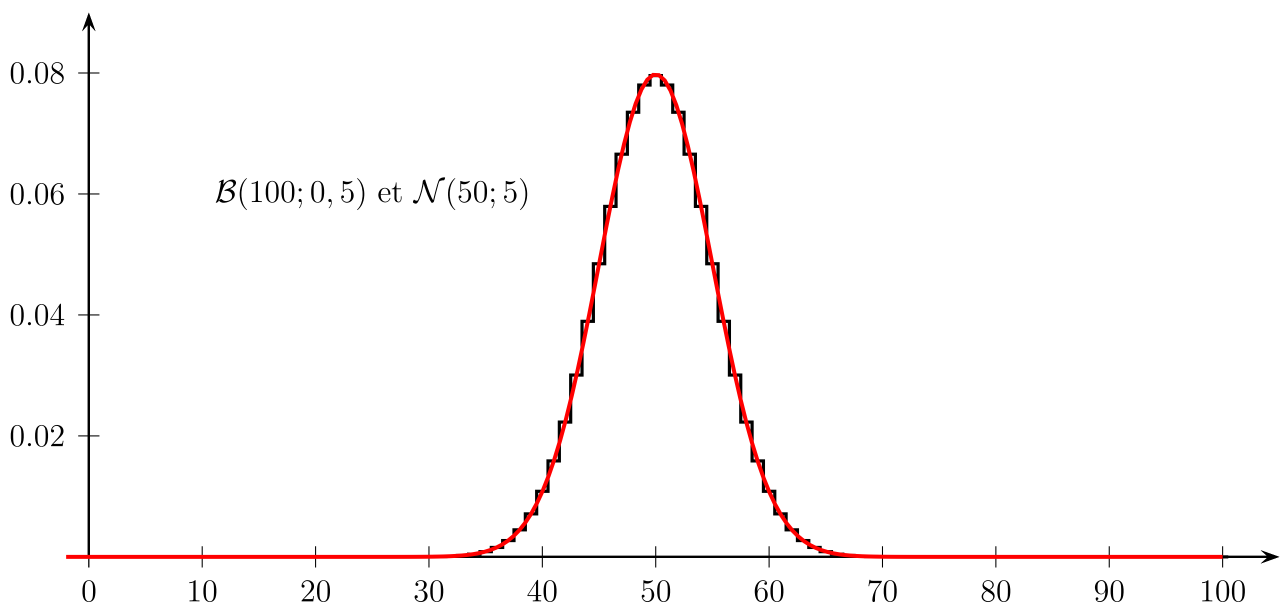
En pratique, on approche les probabilités de la loi binomiale par celles de la loi normale lorsque

$$\boxed{n \geqslant 50, \quad np \geqslant 5 \quad \text{et} \quad nq \geqslant 5}.$$









continuité" en remplaçant une valeur k de la loi discrète par l'intervalle $[k-0,5\,;\,k+0,5]$ de la loi continue.

Par exemple, pour calculer $P(X \leqslant a)$, où X suit une loi binomiale, on pourra utiliser la valeur approchée $P(X < a+0,5)$ donnée par la loi normale.

Exercice 14 Avec la loi $\mathcal{B}(50;0,5)$, $P(X \leqslant 20) \simeq 0,1013$.
Avec la loi $\mathcal{N}\left(25;\sqrt{\dfrac{25}{2}}\right)$, $P(X \leqslant 20) = \cdots$
et, avec la correction de continuité $P(X \leqslant 20,5) = \cdots$

<u>**Exemple :**</u> On estime que la probabilité pour qu'une graine ait perdu son pouvoir germinatif après 3 ans de conservation est de 70%. Sur un échantillon de 100 graines conservées depuis 3 ans, quelle est la probabilité pour que moins de 25 germent ?

La probabilité pour qu'une graine germe est $p=0,3$. On suppose que l'échantillon est prélevé aléatoirement, et en particulier que le pouvoir germinatif de chaque graine est indépendant des autres graines.

On note X la v.a. égale au nombre de graines qui germent parmi les 100.

X suit alors une loi binomiale $\mathcal{B}(100;0,3)$, et la probabilité recherchée est :

$$\begin{aligned}
P(X<25) &= P(X\leqslant 24) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=23)+P(X=24)\\
&= \sum_{k=0}^{k} P(X=k) \quad \text{avec } P(X=k) = C_{100}^k p^k (1-p)^{100-k}
\end{aligned}$$

Le calcul exact est facile à effectuer mais (très) fastidieux. On peut alors, soit utiliser un logiciel de calcul (ou le programmer dans un langage quelconque), qui nous donne $P(X \leqslant 24) \simeq 0,114$, soit en calculer une valeur approchée en utilisant les valeurs tabulées de la loi normale.

On peut ici utiliser la loi normale car les paramètres $n=100$, $np=30$ et $nq=n(1-p)=70$ sont assez grands. On approxime alors les résultats à l'aide de la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$, avec les paramètres :

$$m = np = 30 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100\times 0,3\times 0,7} \simeq 4,5826$$

On remplace ainsi la v.a. discrète $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ par la v.a. continue $X_c \sim \mathcal{N}(m;\sigma)$.

Dernière question : on cherche à calculer $P(X<25) = P(X \leqslant 24)$. Mais, pour la v.a. continue, les probabilités $P(X_c < 25)$ et $P(X_c \leqslant 24)$ sont différentes.

La meilleur approximation sera obtenue en utilisant une correction de continuité et en prenant la valeur intermédiaire 24,5. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
P(X<25) = P(X\leqslant 24) &\simeq P(X_c \leqslant 24,5)\\
&= \Pi\left(\frac{24,5-30}{4,5826}\right) = \Pi(-1,20) = 1-\Pi(1,20) \simeq 1-0,8849 \simeq 0,115\ .
\end{aligned}$$

L'erreur relative commise lors de cette approximation est de $\dfrac{|0,114-0,115|}{0,114} \simeq 8.10^{-3} = 0,8\%$.

Exercice 15 *D'après BTS*

Une ligne de transmission entre un émetteur et un récepteur transporte des pages de texte, chaque page étant représentée par 100 000 bits.

La probabilité pour qu'un bit soit erroné est estimé à 0,0001 et on admet que les erreurs sont indépendantes les unes des autres.

Partie A. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'erreurs lors de la transmission d'une page.

Calculer la moyenne et l'écart type de X.

2. On admet que cette loi peut être approchée par une loi normale de paramètres $m = 10$ et $\sigma = \sqrt{10}$. Dans ces conditions, déterminer la probabilité pour qu'une page comporte au plus 15 erreurs.

Partie B. Pour corriger les erreurs commises à la suite de la transmission d'une page, on transmet cette page autant de fois qu'il le faut jusqu'à l'obtention d'une page sans erreur.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de transmissions (d'une même page) nécessaires pour obtenir une page sans erreur.
Soit $p = 0,05$ la probabilité de transmission d'une page sans erreur et $q = 1 - p$ le probabilité de transmission d'une page avec erreur.
On admet que Y suit la loi de probabilité P définie par $P(Y = n) = pq^{n-1}$; n entier naturel non nul.

a. Calculer $P(Y \leqslant 5)$.

b. Montrer que $P(Y \leqslant n) = 1 - q^n$.

Exercice 16 *Surréservation d'une compagnie aérienne*
Une compagnie utilise des avions d'une capacité de 320 passagers. Une étude statistique montre que 5 passagers sur 100 ayant réservé ne se présente pas à l'embarquement. On considérera ainsi que la probabilité qu'un passager ayant réservé ne se présente pas à l'embarquement est de 0,05.

1. La compagnie accepte 327 réservations sur un vol.
   Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.
   a. Quelle est la loi suivie par X ?
   b. Par quelle loi normale peut-on approcher la loi de X ? Les paramètres de la loi seront déterminés à 10^{-2} près.
   c. En utilisant l'approximation par la loi normale, calculer $P(X \leqslant 320,5)$.
   Penser vous que le risque pris par la compagnie en acceptant 327 réservations soit important ?
2. Serait-il raisonnable pour la compagnie d'accepter sur ce même vol 330 réservations ? 335 réservations ?

Exercice 17 Dans une fabrication automatique d'un grand nombre de pièces, on considère que la proportion de pièces défectueuses est constante.
Une étude statistique permet de considérer qu'une pièce prise au hasard dans la production a une probabilité de 6.10^{-4} d'être défectueuse.

1. Les pièces sont livrées par boîte de 30. On assimile le prélèvement de 30 pièces à 30 tirages avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui associe à toute boîte le nombre pièces défectueuses contenues dans cette boîte.
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Donner à 10^{-4} près les probabilités $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$.
   c. Une boîte étant prise au hasard, quelle est la probabilité que cette boîte contienne au moins 29 pièces défectueuses ?
2. On considère une livraison de 1 000 boîtes. On admet que la probabilité d'avoir une boîte parfaite (sans pièce défectueuse) est de 0,982. On assimile cette livraison de 1 000 boîtes à 1 000 tirages avec remise. On désigne par Y la variable aléatoire qui associe à toute livraison de 1 000 boîtes le nombre de boîtes parfaites.

b. On admet que la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ peut être approchée par la loi normale de moyenne np et d'écart type $\sqrt{np(1-p)}$ lorsque $n \geqslant 50$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$.

Montrer que ces conditions sont vérifiées.

Quelle est la probabilité d'avoir au moins 975 boîtes parfaites ?

Exercice 18 *D'après BTS*

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A. Une collectivité utilise des machines de type M. On a observé que, au cours d'un mois de service, une machine de ce type :

— soit ne tombe pas en panne ;

— soit tombe en panne une et une seule fois avec la probabilité $p = 0,04$.

On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de machines de type M qui tombent en panne au cours d'un mois de service.

1. Soit N le nombre de machines de type M utilisées par la collectivité. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

   Donner l'expression de $P(X = k)$ en fonction de N et k (k entier naturel, $0 \leqslant k \leqslant N$).

   Calculer l'espérance et la variance de X.

2. On suppose, dans cette question, que $N = 100$ et que la loi de probabilité de X peut être approchée par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre λ.

   Calculer, dans ces conditions, la probabilité que, au cours d'un mois de service, au moins cinq machines tombent en panne.

Partie B. Soit Y la variable aléatoire mesurant la durée de vie, en nombre d'années, d'une machine de type M. On suppose que Y suit une loi normale de moyenne $m = 12$ et d'écart type $\sigma = 1,5$.

1. Calculer la probabilité p' qu'une machine ait une durée de vie d'au moins 14 ans.

2. Dans cette question, on prend $p' = 0,09$ (on rappelle que p' est la probabilité qu'une machine ait une durée de vie d'au moins 14 ans).

   Une collectivité utilise 1 000 machines de type M. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 100 de ces machines dont la durée de vie soit supérieure à 14 ans ? (On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z, prenant pour valeur le nombre de machines dont la durée de vie est supérieure à 14 ans, peut être approchée par une loi normale dont on déterminera les paramètres).