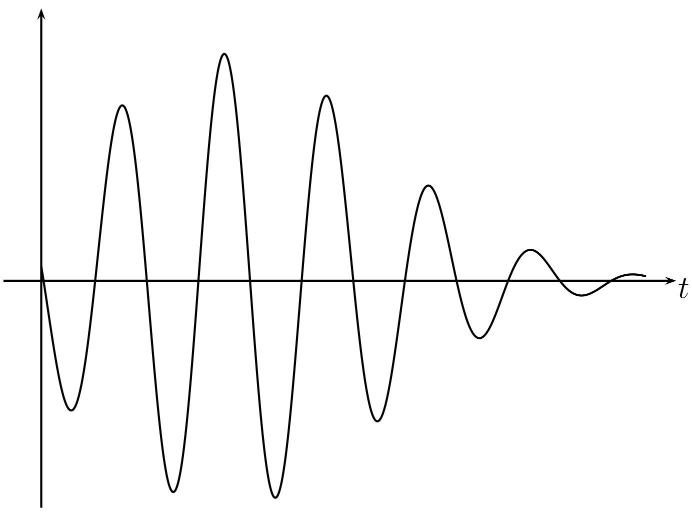
Transformation en Z

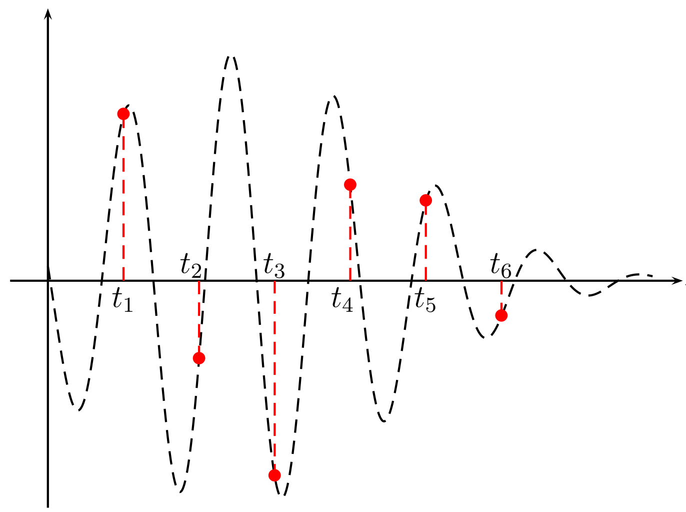
On dispose d'outils adaptés à l'étude de signaux analogiques : les séries de Fourier (lorsque le signal est périodique) et la transformée de Laplace (lorsque le signal est causal).

L'utilisation de plus en plus fréquente de calculateurs numériques nécessite la manipulation de signaux discrets (soit des suites suites discrètes telles que des suites binaires, utilisées entre autre pour stocker et transmettre de l'information, soit des suites discrètes provenant de l'échantillonnage d'un signal analogique tel que par exemple la numérisation de signaux audios).

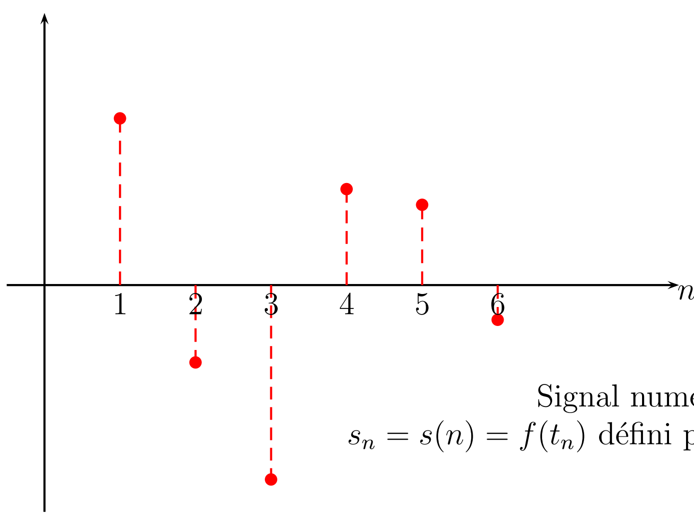
Pour l'étude de tels signaux discrets, l'analogue de la transformée de Laplace est la transformée en z.



Signal analogique s
$s(t)$ défini pour tout t réel, $t \geqslant 0$ (signal causal)



Echantillonnage
du signal s aux instants t_i



Signal numérique (s_n)
$s_n = s(n) = f(t_n)$ défini pour tout n entier, $n \geqslant 0$

I - Série entière

1) Exemple et définition

Exemple : Soit x un nombre réel, alors on sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots + x^N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$.

Ainsi, lorsque $|x|<1$, et donc, $\lim\limits_{N\to+\infty} x^N = 0$, on a en prenant la limite de ces deux termes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \; .$$

Par exemple, lorsque $x=\dfrac{1}{2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, alors, sur $]-1;1[$, on a $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$. Pour $x>1$, $f(x)$ existe, mais pas la série.

Définition *On appelle série entière de la variable x, toute série de terme général $u_n = a_n x^n$, c'est-à-dire toute expression :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \dots$$

Sur tout intervalle où elle est convergente, cette série a pour somme une fonction.

Remarque : Une série entière généralise d'une certaine façon la notion de polynôme (polynôme de degré infini).

2) Rayon de convergence

Soit (a_n) une suite réelle, on se pose la question de la convergence d'une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Définition *On appelle rayon de convergence le plus petit nombre R positif tel que pour tout $|x|<R$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge.*

Propriété *Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors pour tout $|x|<R$, la série est absolument convergente, et pour tout $|x|>R$, la série est divergente.*

Exemple : Soit la série entière de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$.

D'après la règle de d'Alembert, $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}\dfrac{n!}{|x^n|} = \dfrac{|x|}{n}$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|x|}{n} = 0$ pour tout x réel.

Ainsi la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ converge pour tout x réel ; son rayon de convergence est infini : $R=+\infty$.

Exemple : Soit la série entière de terme général $u_n = x^n$.

D'après la règle de d'Alembert, $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = |x|$, et la série converge si et seulement si $|x|<1$.

Ainsi la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge pour tout réel x tel que $|x| < 1$; son rayon de convergence est donc $R = 1$.

3) Propriété des séries entières

a) Somme

Soit deux séries entières de termes généraux $u_n = a_n x^n$ et $v_n = b_n x^n$ de rayons de convergence R_1 et R_2, alors la série entière de terme général $w_n = u_n + v_n = (a_n + b_n)x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R \leqslant \inf(R_1, R_2)$, et pour tout $x < R$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)\, x^n$$

b) Produit par un réel

Soit la série entière de terme général $u_n = a_n x^n$ de rayon de convergence R, alors le produit de cette série entière par le réel k est une série entière de terme général $ku_n = ka_n x^n$ de même rayon de convergence, et donc, pour tout $|x| < R$,

$$k \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} k a_n x^n$$

c) Dérivation

Soit la série entière de terme général $u_n = a_n x^n$ de rayon de convergence R et de somme $S(x)$.
S est continue et dérivable sur $]-R; R[$; la série dérivée a même rayon de convergence et la série peut être dérivée terme à terme :

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(a_n x^n \Big)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Exemple :

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ de rayon de convergence infini, et on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ la somme de cette série.

Alors, $S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = S(x)$

On en déduit que $S(x) = ke^x$.

De plus, $S(0) = 1 \iff k = 1$, d'où, pour tout x réel, $S(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

4) Développement en série entière d'une fonction

Théorème *Formule de Taylor*

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I centré en 0. Si f admet des dérivées jusqu'à un ordre quelconque (on dit que f est de classe C^∞), et si ces dérivées sont majorées sur I par un réel M sur tout intervalle inclus dans I, alors f est développable en série entière sur I avec la formule de Taylor :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

Exemple : Soit $f(x) = e^x$. Pour tout x réel, $f^{(n)}(x) = e^x$, et

$$e^x = e^0 + xe^0 + \frac{x^2}{2}e^0 + \frac{x^3}{3!}e^0 + \cdots + \frac{x^n}{n!}e^0 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Propriété Développement en série entière des fonctions usuelles

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots &&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots &&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots &&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 &&+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n
\end{aligned}$$

Remarque :

- Le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 s'obtient en tronquant la série entière à l'ordre n, et en ajoutant un terme $x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{n\to 0} \varepsilon(x) = 0$, ou de manière équivalente le terme $O(x^{n+1})$ ou $o(x^n)$.
- Le développement limité n'est valable qu'au voisinage d'un point (0 dans les formules). Le développement en série entière est quant à lui valable pour toutes les valeurs de x réel tel que $|x| < R$.
- Cas particulier important du dernier développement en série entière

  Pour $\alpha = 1$, $(1+x)^\alpha = (1+x)^1 = 1 + x$.

  Au premier ordre, on a le développement limité, pour $x \to 0$: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$.

  Par exemple, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $(1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x$, et pour $\alpha = -1$, $(1+x)^\alpha = \frac{1}{1+x} \sim 1 - x$

Exercice 1 Déterminer les limites :

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - x^2}{x^3}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{24x}{1-(1+x)^{12}}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x\,\frac{e^{-1/x} - 1}{\sin \frac{1}{x}}$

II - Transformée en Z

Définition *La transformée en z du signal discret causal défini par $(x_n) = (x(n))$, $n \in \mathbb{N}$, est la fonction X de la variable complexe z définie par :*

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}$$

<u>Remarque :</u>

- Si le signal discret $(x(n))$ n'est pas causal, il faut étendre la série entière :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}$$

- La transformée en z, $X(z)$, est une série entière de la variable $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$.

<u>Notations :</u> On note $X(z)$ ou $(Zx)(z)$ la transformée en z du signal discret (x_n), ou encore $\mathcal{Z}[x(n)]$.

1) Transformées en z usuelles

a) Suite de Dirac

La suite de Dirac (ou suite canonique) est la suite d définie par $\begin{cases} d(0) = 1 \\ d(n) = 0 \quad \text{pour} \quad n \neq 0 \end{cases}$.

Propriété $(Zd)(z) = 1$

b) Dirac retardé

La suite de Dirac retardée de k ($k \in \mathbb{N}$) est la suite d_k définie par $\begin{cases} d_k(k) = 1 \\ d_k(n) = 0 \quad \text{pour} \quad n \neq k \end{cases}$.

Propriété $(Zd_k)(z) = z^{-k}$

c) Echelon unité discret

L'échelon unité discret u est défini par $\begin{cases} u(n) = 1 \text{ si } n \geqslant 0 \\ u(n) = 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$.

Propriété $(Zu)(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$ *pour* $|z^{-1}| < 1 \iff |z| > 1$.

d) Rampe unité causale

La rampe unité causale est définie par $r(n) = nu(n) = \begin{cases} n \text{ si } n \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$.

Propriété $(Zr)(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ *pour* $|z| > 1$.

e) Signal carré discret causal

Le signal carré discret causal est défini par $c(n) = n^2u(n) = \begin{cases} n^2 \text{ si } n \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$.

Propriété $(Zc)(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ *pour* $|z| > 1$.

f) Signal puissance discret causal

Ce signal discret causal est défini par $f(n) = b^nu(n) = \begin{cases} b^n \text{ si } n \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$.

Propriété $(Zf)(z) = \dfrac{z}{z-b}$ *pour* $|z| > |b|$.

2) Propriétés de la transformée en z

Propriété **Linéarité**
Si f et g sont deux signaux causaux discrets admettant des transformées en z, alors :

$$(Z(f+g))(z) = (Zf)(z) + (Zg)(z) \quad \text{et} \quad (Z(kf))(z) = k(Zf)(z)$$

Propriété **Multiplication par a^n**
Si $g(n) = a^nf(n)$, alors $(Zg)(z) = (Zf)\left(\dfrac{z}{a}\right)$

Propriété **Signal retardé**
Si $g(n) = f(n-k)u(n-k)$, alors $(Zg)(z) = z^{-k}(Zf)(z)$

Propriété **Signal avancée**
Si $h(n) = f(n+k)u(n+k)$, alors

$$(Zh)(z) = z^k\left[F(z) - f(0)z^0 - f(1)z^{-1} - f(2)z^{-2} - \cdots - f(k-1)z^{-(k-1)}\right]$$

En particulier :

$$\text{Si } h(n) = f(n+1)u(n+1), \quad (Zh)(z) = z\left[F(z) - f(0)\right]$$
$$\text{Si } h(n) = f(n+2)u(n+2), \quad (Zh)(z) = z^2\left[F(z) - f(0) - f(1)z^{-1}\right]$$

Exercice 2 Déterminer les transformées en z des suites causales définies par :

- $f(n) = (2n+1)u(n)$ • $g(n) = 3^nu(n)$ • $h(n) = 3^nnu(n)$
- $k(n) = 3^nn^2u(n)$ • $l(n) = 3^{n-2}(n-2)u(n-2)$

Exercice 3 Déterminer les transformées en z des signaux discrets :

- $x_1(n) = nu(n)$ • $x_2(n) = nu(n-1)$ • $x_3(n) = nu(n-2)$
- $x_4(n) = (n+1)u(n-1)$ • $x_5(n) = (n+1)u(n-2)$

Indication : on pourra écrire chaque signal x_i sous la forme $x_i(n) = (n-a)u(n-a) + bu(n-a)$.

Exercice 4 $(x(n))$ est une suite vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} x(n+2) + x(n+1) - 6x(n) = nu(n) \\ x(0) = 0 \quad , \quad x(1) = 0 \end{cases}$$

Déterminer la transformée en z, notée $X(z)$, de $(x(n))$.

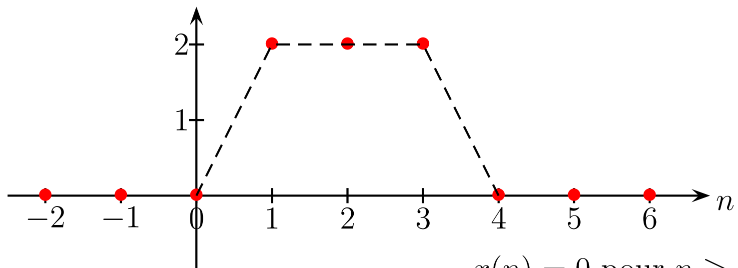
Exercice 5 A l'aide des formules d'Euler, déterminer les transformées en z des signaux discrets suivants :

- $x_1(n) = \cos(n)u(n)$
- $x_2(n) = \sin(n)u(n)$
- $y_1(n) = \cos(n\omega)u(n)$
- $y_2(n) = \sin(n\omega)u(n)$

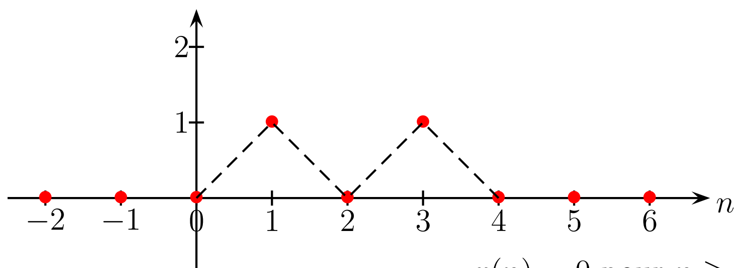
Dans les cas $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ et $\omega = \pi$, représenter graphiquement les signaux et donner leurs transformées en z.

Exercice 6 A l'aide de la définition de la transformée en z et du développement en série entière de la fonction $x \mapsto e^x$, donner les transformées en z des suites causales : $x(n) = \dfrac{1}{n!}$ et $y(n) = \dfrac{2^n}{n!}$.

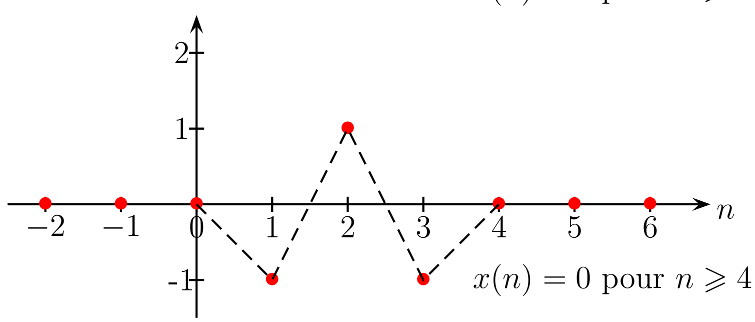
Exercice 7 A l'aide de la définition de la transformée en z, donner les transformées en z des suites causales représentées graphiquement ci-dessous :



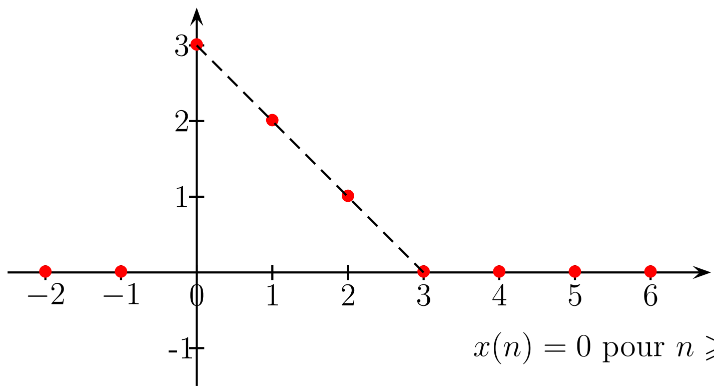
$x(n) = 0$ pour $n \geqslant 4$



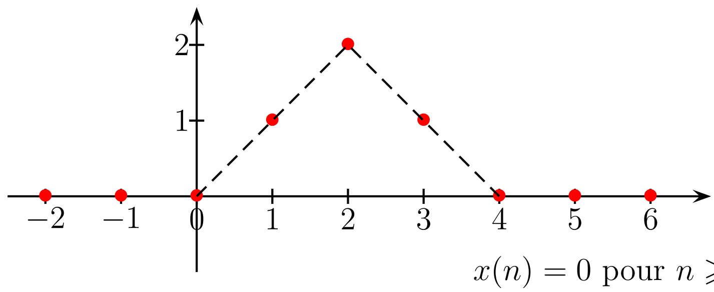
$x(n) = 0$ pour $n \geqslant 4$



$x(n) = 0$ pour $n \geqslant 4$



$x(n) = 0$ pour $n \geqslant 3$



$x(n) = 0$ pour $n \geqslant 4$

Exercice 8 Soit f la fonction numérique causale définie par : $f(t) = (1 - e^{-2t})\, U(t)$.
On échantillonne cette fonction à la période d'échantillonnage T. Donner sa transformée en Z.
Donner son expression lorsque $T = 0,5$ seconde, $T = 2$ secondes et $T = 4$ secondes.

3) Transformée en z inverse

Définition *Si x est un signal causal discret et si $X(z) = (Zx)(z)$ est sa transformée en z, la suite $(x(n))$, $n \in \mathbb{Z}$ est appelée original ou transformée en z inverse de $X(z)$.*
On note $(Z^{-1}X)(n) = x(n)$:

$$(Zx)(z) = X(z) \iff \left(Z^{-1}X\right)(n) = x(n)$$

Propriété • *Si l'original $x(n)$ de $X(z)$ existe, alors elle est unique.*

• **Linéarité :** $(Z^{-1}(X+Y)) = (Z^{-1}(X)) + (Z^{-1}(Y))$ *et* $(Z^{-1}(kX)) = k\,(Z^{-1}(X))$

Méthodes de recherche de l'original : Pour retrouver le signal discret original $x(n)$:

- on décompose en éléments simples $X(z)$ ou $\dfrac{X(z)}{z}$, ou encore $\dfrac{X(z)}{z^k}$ (lorsque le degré du numérateur de $X(z)$ est supérieur ou égal au degré de son numérateur).
  Les éléments le plus fréquemment rencontrés sont de la forme :
  $\dfrac{z}{z-1}$ d'original $u(n)$ (échelon unité discret)
  $\dfrac{z}{z-b}$ d'original $b^n u(n)$
  $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ d'original $nu(n)$ (rampe unité causale)
- on développe en série entière $X(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$, et on a alors simplement $x(n) = a_n$.

Exemple 1 : On recherche l'original de $X(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$.

$X(z)$ se décompose en éléments simples suivant (faire le calcul!) : $X(z)=\dfrac{-1}{z-2}+\dfrac{1}{z-3}$.

On écrit alors $X(z)=-z^{-1}\left(\dfrac{z}{z-2}\right)+z^{-1}\left(\dfrac{z}{z-3}\right)$.

L'originale de $\dfrac{z}{z-2}$ est $2^nu(n)$, tandis que l'originale de $\dfrac{z}{z-3}$ est $3^nu(n)$.

Le facteur z^{-1} correspond à un retard de 1.

On obtient donc l'originale de $X(z)$: $x(n)=-2^{n-1}u(n-1)+3^{n-1}u(n-1)=\left(-2^{n-1}+3^{n-1}\right)u(n-1)$.

Exemple 2 : On recherche l'originale de $X(z)=\dfrac{z^3-3z}{(z+3)(z-1)^2}$.

Le degré du numérateur étant égal à celui du dénominateur, on décompose $\dfrac{X(z)}{z}$ en éléments simples.

On obtient (faire le calcul!) : $\dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{(z-1)^2}+\dfrac{\frac{5}{8}}{z-1}+\dfrac{\frac{3}{8}}{z+3}$,

soit $X(z)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{z}{(z-1)^2}+\dfrac{5}{8}\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{3}{8}\dfrac{z}{z+3}$,

d'où, $x(n)=-\dfrac{1}{2}nu(n)+\dfrac{5}{8}u(n)+\dfrac{3}{8}(-3)^nu(n)=\left(-\dfrac{1}{2}n+\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}(-3)^n\right)u(n)$

Exercice 9 Trouver l'original de $F(z)=\dfrac{z}{z^2-1}$ ($|z|>1$). (Décomposer en éléments simples $F(z)$).

Exercice 10 En utilisant une décomposition en éléments simples de $F(z)$ ou de $\dfrac{F(z)}{z}$, trouver les originaux de :

- $F(z)=\dfrac{z-1}{z+3}$
- $G(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$
- $H(z)=\dfrac{z^2}{z^2-3z+2}$
- $K(z)=\dfrac{3z^2}{z^2-z-2}$
- $L(z)=\dfrac{z^3}{(z-1)^2(z+4)}$

4) Théorème de la valeur initiale et finale

Théorème *Lorsque les limites considérées existent :*

$$\lim_{n\to 0} f(n)=f(0)=\lim_{|z|\to+\infty}(Zf)(z) \quad \textit{(théorème de la valeur initiale)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(n)=\lim_{|z|\to 1}(z-1)(Zf)(z) \quad \textit{(théorème de la valeur initiale)}$$

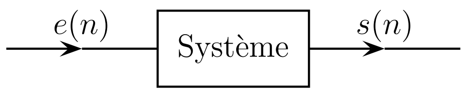
Exercice 11 On donne $X(z)=\dfrac{2z}{(z-1)(2z-1)}$.

1. A l'aide des théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale, déterminer $x(0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}x(n)$.
2. Déterminer l'original $x(n)$ de $X(z)$ et retrouver à partir de $x(n)$ les résultats précédents.

III - Equations récurrentes

Les équations récurrentes, aussi appelées équations aux différences (voir plus bas), sont les relations reliant les signaux discrets en entrée et sortie d'un système. Elles apparaissent aussi lors de la discrétisation d'équations différentielles ou équations aux dérivées partielles.

Soit le système numérique "entrée / sortie" :



La **<u>fonction de transfert $H(z)$</u>** d'un tel système, initialement au repos, est donnée par la relation :

$$S(z) = H(z)\, E(z) \iff \boxed{H(z) = \frac{S(z)}{E(z)}}$$

Exercice 12 Soit le système "entrée / sortie" défini par la relation de récurrence :

$$s(n) = \frac{1}{2}\, e(n) + \frac{1}{2}\, s(n-1)u(n-1) \ ,$$

où u est l'échelon unité.

On suppose que les signaux e et s admettent des transformées en z.

Montrer que la fonction de transfert de ce système est : $H(z) = \dfrac{z}{2z-1}$.

1) Equations récurrentes d'ordre 1

Exercice 13 On considère la suite $(x(n))$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x(n+1) - 2x(n) = 2nu(n) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

On suppose que la suite $(x(n))$ admet une transformée en z, que l'on notera $X(z)$.

1. Calculer $x(1)$ et $x(2)$.
2. En appliquant la transformation en z à l'équation de récurrence, déterminer $X(z)$.
3. Déterminer alors $x(n)$, et montrer que $x(n) = (-2 - 2n + 3.2^n)\, u(n)$.

Exercice 14 Résoudre l'équation aux différences :

$$\begin{cases} y(n+1) - y(n) = (2n+1)u(n) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2) Equations récurrentes d'ordre 2

Exercice 15 On considère la suite $(x(n))$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x(n) - 3x(n-1) + 2x(n-2) = d(n) \\ x(-1) = x(-2) = 0 \end{cases}$$

On suppose que la suite $(x(n))$ admet une transformée z, que l'on notera $X(z)$.

1. Calculer $x(0)$ et $x(1)$.
2. En appliquant la transformation en z à l'équation de récurrence, déterminer $X(z)$.
3. Déterminer alors $x(n)$, et montrer que $(x(n))$ est la suite causale telle que $u(n) = -1 + 2^{n+1}$.

Exercice 16 On considère la suite causale $(y(n))$ définie par la relation de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{l} y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = d(n) \\ \\ y(0) = y(1) = 0 \end{array}\right.$$

On suppose que la suite $(y(n))$ admet une transformée z, que l'on notera $Y(z)$.

1. En appliquant la transformation en z à l'équation de récurrence, déterminer $Y(z)$.
2. En déduire que $y(n) = \left(-1 + 2^{n-1}\right) u(n-1)$.

Exercice 17 Soit l'équation aux différences :

$$\left\{\begin{array}{l} y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = u(n) \\ \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$$

où y est un signal causal discret, et u l'échelon unité.

1. Calculer $y(0)$, $y(1)$ et $y(2)$.
2. On pose $Y(z) = Z(y(n))$.
   En appliquant la transformée en z aux 2 membres de l'équation, montrer que $Y(z) = \dfrac{z^3}{(z-1)^3}$.
3. Déterminer les réels a, b et c tels que $z^2 = a(z+1) + b(z-1) + c(z-1)^2$.
4. En déduire $y(n)$.

3) Equations récurrentes couplées

Exercice 18 On considère les suites causales de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définies ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} u(0) = 1 \\ \\ v(0) = -1 \end{array}\right. \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 0,\ (S) \left\{\begin{array}{l} u(n+1) = \dfrac{4}{3}u(n) - \dfrac{5}{3}v(n) \\ v(n+1) = \dfrac{5}{6}u(n) - \dfrac{7}{6}v(n) \end{array}\right.$$

le but de l'exercice est de déterminer les expressions de $u(n)$ et $v(n)$ en fonction de n, et d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer les trois premiers termes de chaque suite.
2. On notera respectivement $U(z)$ et $V(z)$ les transformées en z de $u(n)$ et $v(n)$.
   Appliquer la transformée en z au système (S).
3. Résoudre ce système et montrer que
   $$U(z) = \frac{z(6z+17)}{(2z-1)(3z+1)} \quad \text{et} \quad V(z) = \frac{z(13-6z)}{(2z-1)(3z+1)}\ .$$
4. Décomposer en éléments simples $\dfrac{U(z)}{z}$ et $\dfrac{V(z)}{z}$.
5. Déterminer alors les expressions de $u(n)$ et de $(v(n)$ en ofnction de n.
   Retrouver les résultats de la question 1.
6. Déterminer la limite de chacune de ces suites quand n tend vers $+\infty$.

IV - Discrétisation d'équations différentielle

Rappel Le taux d'accroissement d'une fonction en t_0 est $\tau(h) = \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$.

A la limite $h \to 0$, on obtient le nombre dérivé de f en t_0 (s'il existe) : $f'(t_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$.

On échantillonne la fonction f à la période T, et on pose $y(n) = f(nT)$.

On a alors, $f'(nT) \simeq \dfrac{f(nT+T)-f(nT)}{T} = \dfrac{f((n+1)T)-f(nT)}{T} = \dfrac{y(n+1)-y(n)}{T}$, l'approximation étant d'autant meilleure que $T \to 0$.

De la même façon, on peut approximer la dérivée seconde :

$$f''(nT) \simeq \frac{f'((n+1)T)-f'(nT)}{T} \simeq \frac{y(n+2)-2y(n+1)+y(n)}{T^2}$$

Ces méthodes d'approximations, très utilisées de nos jours, sont aussi connues sous le nom de méthode des "différences finies".

Exercice 19 Soit l'équation différentielle $(E)\left\{\begin{array}{l} y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0 \\ y(0)=0\ ;\ y'(0)=1 \end{array}\right.$

dans laquelle y est une fonction causale.

1. Résoudre cette équation, et montrer que $y(t) = (e^{-t}-e^{-2t})\,\mathcal{U}(t)$.
2. a) On discrétise cette équation à la période d'échantillonnage T. On utilise alors les approximations des dérivées :

$$y'(nT) \simeq \frac{y(n+1)-y(n)}{T} \quad \text{et} \quad y''(nT) \simeq \frac{y(n+2)-2y(n+1)+y(n)}{T^2}\ .$$

Montrer que l'on obtient la relation de récurrence :

$$y(n+2)+(3T-2)y(n+1)+(2T^2-3T+1)y(n)=0$$

b) Montrer que les deux premières termes de la suite sont $y(0)=0$ et $y(1)=T$.

c) Déterminer l'expression de la transformée en z, que l'on notera $Y(z)$ de $y(n)$.
Montrer que $Y(z) = \dfrac{zT}{z^2+z(-2+3T)+(1-3T+2T^2)}$

d) Montrer que les pôles (racines du dédnominateur) de $Y(z)$ sont $1-T$ et $1-2T$.
En déduire l'expression de $Y(z)$:

$$Y(z) = z^{-1}\frac{(1-T)z}{z-(1-T)} + z^{-1}\frac{(2T-1)z}{z-(1-2T)}$$

e) Montrer alors que l'originale $y(n)$ de $Y(z)$ est : $y(n) = \left((1-T)^n-(1-2T)^n\right)u(n)$.

Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs à 10^{-3} près :

t		0	$0,1$	$0,5$	1
$y(t)$					
$T = 0,1$	n				
	$y(n)$				
$T = 0,01$	n				
	$y(n)$				