Exercice 1 Soit α un nombre réel et f la fonction périodique de période 1, définie par l'expression

$$f(t) = \cos(3\alpha)\cos(2\pi t) + \sin(3\alpha)\sin(2\pi t)$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f.
2. Déterminer la valeur moyenne de f et sa valeur efficace.

Exercice 2 Soit α un nombre réel, $0 < \alpha < 1$, et ψ la fonction impaire et 2π-périodique définie par

$$\psi(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \alpha\pi \\ 0 & \text{si } \alpha\pi < t \leqslant \pi \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction ψ sur $[-2\pi\,;\,4\pi]$.
2. Ecrire la série de Fourier associée à ψ.

Exercice 3 Soit la fonction π-périodique φ définie par

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\cos(2nt) - \frac{5\sqrt{2}}{6}\sin(2nt) + \frac{\sqrt{6}}{8}\cos(6nt)$$

Déterminer la valeur efficace φ_{eff} de φ.

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, de période 2π telle que :

$$f(t) = Ke^{-t} \qquad \text{si } t \in [0; 2\pi[\,,$$

K étant une constante réelle positive.

1. On se propose de calculer les intégrales

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-t}\cos(nt)\,dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{2\pi} e^{-t}\sin(nt)\,dt$$

   où n est un entier strictement positif.

   a. *Première méthode*
   En intégrant I par parties, prouver que $I = \dfrac{1}{n}J$.
   En intégrant J par parties, prouver que $J = \dfrac{1}{n}\left(1 - e^{-2\pi}\right) - \dfrac{1}{2}I$.
   En déduire les valeurs de I et J.

   b. *Deuxième méthode*
   Prouver que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{jnt}e^{-t}\,dt = \frac{1 - e^{-2\pi}}{1 - nj}$, où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
   En déduire les valeurs de I et J.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

   Dans toute la suite, on suppose que $K = \dfrac{\pi}{1 - e^{-2\pi}}$.

3. Prouver que, si $t \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on a :

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\cos(nt) + \frac{n}{n^2+1}\sin(nt)\right)$$

   Quelle est la somme de la série de Fourier si $t = 2k\pi$?

4. Dessiner le spectre de fréquence de f.