Objectif Une série de Fourier d'une fonction, ou signal, périodique f, est sa décomposition en une somme de fonctions sinusoïdales.

I - Définition

Définition *Une série de Fourier est une série dont le terme général est de la forme :*

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \qquad \text{où } a_n, b_n, \omega \text{ et } t \text{ sont des réels}$$

Il s'agit donc d'une série que l'on peut écrire sous la forme :

$$a_0+\sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\omega t)+b_n \sin(n\omega t) = a_0+a_1\cos(\omega t)+b_1\sin(\omega t)+a_2\cos(2\omega t)+b_2\sin(2\omega t)+\dots$$

Les coefficients a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier.

Exemple :

$$3+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\cos(2\pi nt)+18\sin(2\pi nt)\ , \qquad a_0=3\ ,\ a_n=(-1)^n\ ,\ b_n=18\ ,\ \omega=2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nt)\ , \qquad a_0=\frac{\pi}{2}\ ,\ a_n=0\ ,\ b_n=\frac{(-1)^n}{n}\ ,\ \omega=1$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(5)^n+3}{n+6}\cos(3nt)\ , \qquad a_0=0\ ,\ a_n=\frac{(5)^n+3}{n+6}\ ,\ b_n=0\ ,\ \omega=3$$

Définition *Si pour tout réel t, cette série converge alors on définit la fonction S par*

$$S(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(n\omega t)+b\sin(n\omega t)$$

On dit alors que la série de Fourier converge vers la fonction S.

Remarque : La série converge vers une fonction et non plus vers un nombre.

Exercice 1 A l'aide de la calculatrice trouver l'expression de la fonction qui est la limite de la série de Fourier suivante.

$$S(t)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nt)$$

Comparer avec la fonction f 2π-périodique définie par :

$$f(t)=\frac{\pi-t}{2}\ ,\ \text{pour } t\in]-\pi;\pi[$$

Objectif Pour une fonction f donnée (avec f continue par morceaux et périodique de période T), on recherche une série de Fourier qui converge vers f.

1. Joseph Fourier, né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris, est un mathématicien et physicien français, connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier. Il fait ses études chez les Bénédictins à l'école militaire d'Auxerre. Destiné à l'état monastique, il préfère s'adonner aux sciences. Il intègre l'école normale supérieure, où il a entre autres comme professeurs Joseph-Louis Lagrange, Gaspard Monge et Pierre-Simon Laplace, auquel il succède à la chaire à Polytechnique en 1797.

1) Un candidat pour la série de Fourier ?

Théorème *Soit f une fonction continue par morceaux périodique de période T.*
Si f s'écrit comme la somme d'une série de Fourier $a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\omega t) + b\sin(n\omega t)$ alors :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\textit{pour } n > 0,\ a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)dt \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\textit{pour } n > 0,\ b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)dt \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

2) Cet unique prétendant fait-il l'affaire ?

Définition *On dit qu'une fonction périodique f satisfait aux conditions de Dirichlet[1] (on dit aussi que f est C^1 par morceaux, ce qui s'écrit CM^1) si :*

1) *Sauf en un nombre fini de points particuliers sur une période, f est continue, dérivable et sa dérivée f' est continue.*
2) *en ces points particuliers, f et f' admettent des limites finies à gauche et à droite.*

Exercice 2 Soit $k > 0$.
Soit f une fonction impaire de période π définie par

$$f(t) = \begin{cases} k & \text{pour } t \in [0; \frac{\pi}{2}[\\ -k & \text{pour } t \in [\frac{\pi}{2}; \pi[\end{cases}$$

Cette fonction vérifie-t-elle les conditions de Dirichlet ?

Calculer ses coefficients de Fourier, et écrire sa série de Fourier.

Théorème *Si f est une fonction périodique satisfaisant aux conditions de Dirichlet, alors*

1) *si f est continue en t alors la série de Fourier associée à f converge vers $f(t)$*
2) *si f n'est pas continue en t alors la série de Fourier associée à f converge vers $\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$*

1. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 février 1805, Düren - 5 mai 1859, Göttingen) est un mathématicien allemand. Il a été élevé en Allemagne, puis a été ensuite envoyé en France pour suivre ses études supérieures. Il fut en contact avec les plus grands mathématiciens français de l'époque, à l'instar de Legendre, Laplace ou Fourier. Il retourne ensuite en 1825 en Allemagne où il travaille avec Gauss, dont il reprendra la chaire à l'Université de Göttingen, et Jacobi. Il eut entre autres comme élève Riemann.

Propriété ***Si f est paire***

$$\forall n,\ b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

$$pour\ n > 0,\ a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt$$

Si f est impaire

$$\forall n,\ a_n = 0$$

$$pour\ n > 0,\ b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt$$

Exercice 3 Soit $k > 0$.
Soit f une fonction impaire de période π définie par

$$f(t) = \begin{cases} k & \text{pour } t \in [0; \frac{\pi}{2}[\\ -k & \text{pour } t \in [-\frac{\pi}{2}; 0[\end{cases}$$

Après avoir représenté f sur $[-2\pi; 2\pi]$, Donner la série de Fourier associée à f.

Exercice 4 *Signal "dents de scie"*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, de période 2π, telle que :

$$f(t) = t \quad \text{si } t \in [-\pi; \pi[$$

Soit a_n et b_n les coefficients de Fourier de cette fonction.

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$.
2. Justifier que, pour tout n, $a_n = 0$.
3. Prouver que pour tout entier $n > 0$, $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$.
4. Ecrire les cinq premiers termes de la série de Fourier associée à f.

Exercice 5 *"Redressement biphasé"*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\cos t|$.
Soit a_n et b_n les coefficients de Fourier de cette fonction.

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$.
2. Prouver que f est une fonction paire de période π.
3. Déterminer les valeurs des coefficients b_n.
4. Calculer la valeur moyenne de f sur une période.
5. Prouver que, pour $n > 0$, on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos((2n+1)t) + \cos((2n-1)t)\right] dt$$

   En dédurie que $a_n = \dfrac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}$.
6. Ecrire les cinq premiers termes de la série de Fourier associée à f.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de période 4, impaire, et telle que :

$$\begin{cases} f(t) = t & \text{si } \ t \in [0;1[\\ f(t) = -t+2 & \text{si } \ t \in [1;2[\end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de la série de Fourier associée à f.
2. Ecrire la série de Fourier de f, et montrer que cette série converge vers f.
3. En calculant $f(1)$, prouver que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

III - Analyse spectrale

Pour une fonction f T-périodique et vérifiant les conditiant de Dirichlet, on a donc la série de Fourier, avec la pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$:

$$a_0 + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

qui peut aussi s'écrire : $$a_0 + \sum_{n\geqslant 1} A_n \sin(n\omega t - \varphi_n)$$

avec les coefficients $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Définition *Le spectre de la fonction f est la suite de coefficients (A_n).*

IV - Formule de Parseval [2]

Théorème *Soit f une fonction périodique et continue par morceaux. On a alors*

$$\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Remarque : Il n'est pas nécessaire que f vérifie les conditions de Dirichlet.

Exercice 7 *"Redressement monophasé"*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, de période 2π, paire, telle que :

$$\begin{cases} f(t) = \cos t & \text{si } \ t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[\\ f(t) = 0 & \text{si } \ t \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[\end{cases}$$

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-4\pi;4\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de cette fonction, et écrire la série de Fourier correspondante.
3. Calculer la valeur efficace de la fonction f, et appliquer la formule de Parseval.

2. Marc-Antoine Parseval des Chênes (27 avril 1755 - 16 août 1836) est un mathématicien français, célèbre pour les travaux connus sous le nom d'égalité de Parseval, qui est une formule fondamentale de la théorie des séries de Fourier.

Un signal est modélisé par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : f est paire et de période π, et $f(t) = t\sin t$ pour t élément de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

1. a. Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

   b. Soit $\mathcal{C}_1$ la représentation graphique de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, Tracée dans un repère orthonormal du plan (unité graphique 2cm).
   Tracer les tangentes à $\mathcal{C}_1$ aux points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$. Tracer $\mathcal{C}_1$

   c. Dans un même repère, tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

2. On admet que f est développable en série de Fourier et que, pour tout t élément de $\mathbb{R}$,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt)\right) .$$

   a. Justifier que $b_n = 0$ pourtout $n \geqslant 1$.

   b. Calculer a_0.

   c. Montrer que $a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left(\sin(3t) - \sin t\right)\, dt$ En déduire que $a_1 = \frac{-20}{9\pi}$.
   Dans la suite, on utilisera le résultat :

$$a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\right]$$

3. On considère la fonction g définie que $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = a_0 + a_1 \cos(2t) + +a_2 \cos(4t) .$$

   On admet que la formule de Parseval appliquée à g donne une valeur approchée à 10^{-3} près de la valeur efficace f_e de la fonction f.
   Calculer alors une valeur approchée à 10^{-3} près de f_e.

V - Forme complexe des séries de Fourier

Propriété *La série de Fourier associée à une fonction f peut s'écrire*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

Propriété *Les relations entre les coefficients réels a_n et b_n et les coefficients complexes c_n sont :*

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

Propriété *La formule de Parsemal s'écrit*

$$\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

1. Soit n un entier naturel non nul.
   Calculer à l'aide de deux intégrations par parties successives l'intégrale :
   $$J = \int_0^{\pi} t(\pi - t)\cos(2nt)\,dt\,.$$

2. On considère la fonction u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période π, définie par :
   $$u(t) = t(\pi - t) \quad \text{si } t \in [0;\pi]\,.$$
   a. Montrer que u est paire et tracer sa représentation graphique sur $[-2\pi; 2\pi]$.
   b. Vérifier que u satisfait aux conditions de Dirichlet.
   c. Calculer ses coefficients de Fourier et en déduire que pour tout t réel :
   $$u(t) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nt)}{n^2}\,.$$

3. n est un entier naturel non nul. Justifier la convergence des séries numériques de terme général :
   $$\frac{1}{n^2}\ ;\ \frac{(-1)^n}{n^2}\ ;\ \frac{1}{n^4}\,.$$

4. En utilisant le développement de u en série de Fourier pour $t = 0$, puis pour $t = \frac{\pi}{2}$, déterminer :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\,.$$

5. La valeur efficace u_e de la fonction u est telle que $(u_e)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)\,dt$.
   Calculer u_e^2.
   La valeur efficace de la fonction u peut aussi s'exprimer à l'aide de la formule de Parseval :
   $$u_e^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\,.$$
   Soit P le nombre défini par
   $$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2\right)\,.$$
   Donner l'approximation de décimale P_1 à 10^{-3} près par excès.
   Vérifier que $\frac{P_1}{u_e^2} > 0,999$.

6. En utilisant la formule de Parseval, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.