"Les questions les plus importantes de la vie ne sont pour la plupart que des problèmes de probabilité."

Pierre Simon de Laplace (1749-1827)

Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard.

Henri Poincaré (1854-1912)

On connaît la frayeur de ce malade qui, sur le point de subir une intervention chirurgicale, demande :
- Docteur, combien a-t-on de chances de se tirer de là ?
- 99 pour cent.
- Et vous avez déjà réussi beaucoup d'opérations comme celle-là ?
- 99.

Jean-Louis Boursin, Les structures du hasard. Les probabilités et leurs usages

I - Loi des grands nombres

Jacob Bernoulli[1] donna un premier modèle mathématique de cette loi vers 1690 (édité en 1713 dans son ouvrage *ars conjectandi*). C'est sur cette loi que repose des institutions telles que les sondages, les assurances ...loi qui leur permet de calculer des probabilités et autres risques à partir d'études statistiques.

Théorème Loi des grands nombres

Si l'on répète N fois une expérience dans laquelle la probabilité d'apparition d'un évènement est P, la fréquence de cet évènement au cours des N expériences tend vers P lorsque N tend vers l'infini.

Ce théorème permet de faire le lien entre les statistiques et les probabilités, en justifiant le fait que l'on peut choisir comme probabilité d'un événement la fréquence statistique d'apparition de cet événement lorsque le nombre d'expériences est très grand.

1. Jacques ou Jakob Bernoulli (1654 - 1705) est un mathématicien et physicien suisse, frère de Jean Bernoulli et oncle de Daniel Bernoulli et Nicolas Bernoulli.

soumis au hasard n'étonne personne. Pourtant, si l'on fait cette expérience un grand nombre de fois, on constate que les résulltats s'équilibrent autour des probabilités, comme s'il existait une loi d'équilibre naturel et que, à long terme, le chaos était impossible et les catastrophes de moins en moins probables.

Pour Andreï Kolmogorov [2], *"la valeur épistémologique de la théorie des probabilités est fondée sur le fait que les phénomènes aléatoires engendrent à grande échelle une régularité stricte, où l'aléatoire a, d'une certaine façon, disparu"*. Appliquée aux sociétés humaines, cette régularité statistique absolue qu'évoque Kolmogorov pose l'interrogation suivante : nos actions individuelles peuvent-elles être autre chose que la confirmation d'une tendance générale qui nous dépasse ?

II - Vocabulaire probabiliste

Définition
- *Une "**expérience aléatoire**" ou "**épreuve aléatoire**" est une expérience due au hasard[3], c'est à dire dont on ne peut pas prévoir à l'avance le résultat.*
- *Les résultats d'une telle expérience sont appelés "**éventualités**" ou "**événements élémentaires**" ou "**issues**"*
- *L'ensemble des éventualités est appelé "**univers**" et est souvent noté U ou Ω.*

Exemple : Le lancé d'un dé est une expérience aléatoire (sauf si le dé est totalement truqué).
Une éventualité de cette expérience est 3.
L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Remarque : L'**univers** est **un ensemble** et les **éventualités** sont les **éléments** de cet ensemble.

Définition *On appelle **événement** une partie de Ω, c'est-à-dire un **sous ensemble** de l'univers, ou encore un ensemble d'éventualités.*

Exemple : Au lancé du dé, A="Obtenir un nombre pair" est un événement, et on a : A={2 ;4 ;6}

Remarque : Dans les écritures du type {a,b,c,..} on n'écrit jamais deux fois le même élément et l'ordre des éléments n'intervient pas : {1 ;4 ;2 ;1}={1 ;4 ;2}={4 ;2 ;1}=...

III - Langage des événements

Définition *Soit A et B deux événements liés à une expérience aléatoire dont l'univers est noté Ω.*
- *l'**événement contraire de A dans** Ω est l'événement qui contient les éléments de Ω qui ne sont pas dans A. C'est le **complémentaire de A dans** Ω et il est noté $\overline{A}$.*
  ***NB** : Dans la notation $\overline{A}$ l'univers Ω est sous entendu.*
- *l'**événement** «**A et B**» est l'événement qui contient tous les éléments de Ω qui sont à la fois dans A et B. Cet événement est noté $A\cap B$.*
- *l'**événement** «**A ou B**» est l'événement qui contient tous les éléments de Ω qui sont soit dans A soit dans B. Cet événement est noté $A\cup B$.*
- *On dit que les événements A et B sont **incompatibles** ou **disjoints** lorsqu'ils n'ont pas d'éléments en commun, c'est à dire lorsque $A\cap B=\emptyset$.*

2. Andreï Kolmogorov est un mathématicien russe (25 avril 1903 - 20 octobre 1987) dont les apports en mathématiques sont considérables.
3. du mot "az zahr" qui veut dire "dé à jouer" ou "chance"

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \quad et \quad A \cup \overline{A} = \Omega\,.$$

Exercice 1

1. Donner l'événement contraire de l'événement A=≪Obtenir un nombre pair≫
2. Donner l'événement ≪Obtenir un nombre pair et obtenir un nombre plus petit que 5≫
3. Donner l'événement ≪Obtenir un nombre impair et obtenir un nombre plus grand que 2≫
4. J'achète trois billets de tombola. Donner l'événement contraire de l'événement A="Tous mes billets sont gagnants".

Remarque :(Propriété) Pour tous événements A et B, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

IV - Probabilité d'un événement

Définition *Soit Ω un univers fini.*
On définit une probabilité en associant à chaque événement un nombre compris entre 0 et 1 tel que :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *pour tous les événements incompatibles (ou disjoints).*

Exercice 2 On lance un dé : on a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Sur le même ensemble on peut avoir des probabilités différentes :

a) Dé normal (non truqué) : Les probabilités des six événements élémentaires sont égales.
Donner ces probabilités puis donner la probabilité de l'événement A : ≪le nombre sorti est pair≫

b) Dé truqué :
$P(\{1\}) = \dfrac{1}{12}$, $P(\{6\}) = \dfrac{5}{12}$ et $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\})$.
Calculer $P(\{2\})$ puis donner la probabilité de l'événement A : ≪le nombre sorti est pair≫

Propriété *Soit A et B deux événements d'un univers Ω, alors :*

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- *Si A et B sont incompatibles alors* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$
- *Si* $A \subseteq B$ *alors* $p\left(\overline{A}\right) \leq p(B)$
- $p\left(\Omega\right) = 1$, *et* $p\left(\emptyset\right) = 0$

Exercice 3

a) Soit A et B deux événements. On donne $p(A \cup B) = 0.4$, $p(B) = 0.8$ et $p(A \cap B) = 0.5$
Calculer $p(A)$.

b) Dans un lot de 32 pièces, 8 ont subi le contrôle C_1, 12 le contrôle C_2 et 3 les contrôles C_1 et C_2. On choisit au hasard une pièce, quelle est la probabilité pour qu'elle ait subi le contrôle C_1 ou le contrôle C_2 ?

Définition *Si toutes les éventualités d'un univers Ω ont la même probabilité, on dit qu'on a une situation d'équiprobabilité sur Ω.*

Propriété *Sous l'hypothèse d'équiprobabilité sur Ω, la probabilité d'un événement A est :*

$$p(A) = \frac{\textit{nombre d'éventualités dans } A}{\textit{nombre d'éventualités dans } \Omega} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

<u>Exemple :</u>

a) Lancer de dés non truqué.

b) Tirage de cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes.

VI - Probabilité Conditionnelle

1) Exemple

Un atelier utilise 3 machines M_1, M_2 et M_3. La fabrication est répartie suivant les machines, mais, selon la vétusté des machines, les pièces présentent parfois des défauts :

Machine	M_1	M_2	M_3
Pièces fabriquées	50%	35%	15%
Défauts	1%	2%	6%

On tire une pièce au hasard dans le stock et on cherche la probabilité pour que cette pièce soit défectueuse.
On appelle D l'événement "la pièce est défectueuse" et M_i l'événement "la pièce provient de la machine M_i" ($i = 1$, 2, ou 3).
Décrire la situation par un arbre de probabilité (arbre pondéré), et calculer la probabilité de l'événement D.

2) Définitions

Définition *Soit P une probabilité sur un univers Ω et B un événement tel que $P(B) \neq 0$.
La probabilité de A, sachant que B est réalisé, est notée $P(A|B)$ ou $P_B(A)$.
Elle est définie par $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$ et donc on a*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Définition *Deux événements de probabilités non nulles sont dits indépendants si la réalisation de l'un n'agit pas sur la réalisation de l'autre. En d'autres termes si $P(A|B) = P(A)$ (ou $P(B|A) = P(B)$).*

Propriété *Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.*

B *et* $\overline{A}$ *ainsi que* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$

Exercice 4

a) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Trouver deux événements indépendants et deux événements dépendants

b) On tire une boule dans une urne qui contient 10 boules numérotés de 1 à 10. Montrer que les événements «la boule tirée a un numéro impair» et «la boule tirée a un numéro supérieur à 6» sont indépendants

Exercice 5 On suppose que chacun des moteurs d'un avion bimoteur tombe en panne avec une probabilité de $0,000\,1$ et ceci de façon indépendante de l'autre moteur.

Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port, sachant qu'il peut voler avec un seul moteur ?

Exercice 6 Un circuit électronique est formé de 10 éléments identiques installés en série. Chaque élément a, indépendamment des autres, une probabilité de 0,2 de tomber en panne.

Quelle est la probabilité pour que le circuit tombe en panne ?

VII - Dénombrement

La formule fondamentale des probabilités : $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'éventualités dans } A}{\text{nombre d'éventualités dans } \Omega} = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$
signifie que, pour calculer la probabilité d'un événement A, il "suffit" de connaître le nombre d'éventualités (ou d'issues élémentaires) composant A.

Le calcul de probabilité se ramène ainsi à un **dénombrement** des possibilités.

Lorsque le nombre de ces éventualités est trop grand, il n'est pas question de les écrire toutes, ou encore de les décrire à l'aide d'un arbre.

Les **arrangements**, **permutations** et **combinaisons** sont des outils qui permettent efficacement de compter (ou dénombrer) ces éventualités.

1) Listes

Définition *Une p-liste (ou un p-uplet) d'un ensemble E à n éléments est une suite ordonnée de p éléments de E, distincts ou non.*

Exercice 7 Soit $E = \{a; b; c; d; e\}$, alors $(a; b; c)$, $(a; c; b)$, $(a; c; c)$, $(b; b; b)$, $(d; e; b)$, ... sont des 3-listes (ou triplets) d'éléments de E.

Dénombrer le nombre de triplets de E.

Propriété *Le nombre de p-listes d'un ensemble E à n éléments est n^p.*

Exercice 8 *Tirage successif avec remise*

Une urne contient 4 boules : une verte (V), une rouge (R), une bleue (B) et une jaune (J).

On tire 3 boules successivement avec remise, c'est-à-dire en remettant après chaque tirage la boule tirée.

Déterminer le nombre de tirages possibles.

Définition *Un arrangement à p éléments d'un ensemble E à n éléments est une suite ordonnée de p éléments de E distincts ($p \leqslant n$).*

Exercice 9 Soit $E = \{a; b; c; d; e\}$.
$(a; b; c)$, $(a; c; d)$, $(b; c; a)$, ...sont des arrangements à 3 éléments de E.
Ces arrangements sont bien différents, en particulier, $(a; b; c)$ est différent de $(b; c; a)$.

Déterminer le nombre d'arrangement de E à 3 éléments.

Propriété *Le nombre d'arrangements à p éléments d'un ensemble E à n éléments, noté A_n^p, est*

$$A_n^p = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-1+p)}_{p \text{ facteurs}}.$$

Exercice 10 *Tirage sans remise*
Une urne contient 4 boules : une verte (V), une rouge (R), une bleue (B) et une jaune (J).
On tire 3 boules successivement sans remise, c'est-à-dire sans remettre la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.

Déterminer le nombre de tirages possibles de 3 boules.

3) Permutations

Définition *Une permutation d'un ensemble E à n éléments est un arrangement à n éléments de E, c'est-à-dire une liste ordonnée de tous les éléments de E.*

Exercice 11 Soit $E = \{a; b; c; d; e\}$.
$(a; b; c; d; e)$, $(a; b; c; e; d)$, $(b; c; a; e; d)$ ...sont des permutations de E.

Déterminer le nombre de permutations de l'ensemble E.

Propriété *Le nombre de permutation d'un ensemble E à n éléments, noté $n!$, est*

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Par exemple, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$: il y a 120 permutations possibles d'un ensemble de 5 éléments.

Remarque : $n! = A_n^n$

Propriété *Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments est :*

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-1+p) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

4) Combinaisons

Définition *On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble E à n éléments toute partie de E à p éléments ($p \leqslant n$).*

Exercice 12 Soit $E = \{a; b; c; d; e\}$.
$\{a; b; c\}$, $\{b; c; d\}$, $\{a; c; e\}$ ...sont des combinaisons à 3 éléments de E.
$\{a; b; c\}$ est la même combinaison que $\{b; c; a\}$. Toute permutaion de p éléments donne donc la même combinaison.

Déterminer le nombre de combinaisons de 3 éléments de E.

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\,.$$

Exercice 13 *Tirage simultané*
Une urne contient 4 boules : une verte (V), une rouge (R), une bleue (B) et une jaune (J). On en tire 3 boules simultanément.

Déterminer le nombre de tirages possibles.

Propriété Propriétés des combinaisons

- $C_n^0 = C_n^n = 1\,;\ C_n^1 = n$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$ *(chosir p éléments parmi n revient à choisir les $n-p$ éléments restants)*

Propriété Triangle de Pascal *Pour tout* $1 \leqslant p \leqslant n$, $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Conséquence : On peut donc calculer les coefficients binomiaux de proche en proche à l'aide du triangle de Pascal qui se construit de la façon suivante :
- *la première colonne et la diagonale comportent des 1*
- *tout autre nombre est obtenu en additionnant le nombre situé au-dessus et celui situé au-dessus et à gauche*

$n \backslash p$	0	1	2	3	
0	C_0^0				
1	C_1^0	C_1^1			
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2		
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4
5	$\dots$				

$n \backslash p$	0	1	2	3	
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1
5	$\dots$				

Propriété Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k\,.$$

Démonstration: $(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b)\dots(a+b)$.
Pour développer ce produit, on choisit, pour chaque terme du développement un terme, et un seul, par facteur.
Ainsi, dans k des facteurs, on choisit b et dans les $n-k$ restants on choisit nécessairement a.
Le terme obtenu est donc de la forme $a^{n-k}b^k$. Il y a en tout $C_n^k = C_n^{n-k}$ tels choix de facteurs, d'où le terme $C_n^k a^{n-k} b^k$. □

Exercice 14

- $(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k a^{3-k} b^k = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)^4 = \ \cdots$
- $(1+i)^6 = \ \cdots$

Exercice 15

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Le digicode ci-contre se trouve à l'entrée d'un immeuble. Un code se compose de 2 lettres, puis 3 chiffres, par exemple $BA544$.

1. Déterminer le nombre de codes possibles.
2. Parmi ces codes, combien y en-a-t'il qui :
   a. ont leurs 3 chiffres pairs ?
   b. ont 3 chiffres distincts ?
   c. ont 2 lettres distinctes et 3 chiffres distincts ?

Exercice 16 Le système de code d'une carte bancaire comprend 10 chiffres. On forme un code en choisissant, dans l'ordre, 4 chiffres parmi les 10, les chiffres pouvant être répétés.

1. Sur 3 essais au hasard, quelle est la probabilité de taper le code correct ?
2. Je me rappelle que le code exact commance par un 2. Quelle est alors la probabilité de taper le code complet exact ?
3. J'utilise un moyen informatisé qui teste successivement tous les codes, à raison de un code testé toutes les 10 secondes.
   Combien de temps mettra mon système pour tester tous les codes ?

Exercice 17 Un lot de 100 pièces comprend 5 pièces défectueuses.

Partie A. On tire au hasard, avec remise, 10 pièces dans le lot.

1. Quelle est la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse parmi les 10 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir une seule pièce défectueuse parmi les 10 ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse parmi les 10 ?

Partie B. On tire au hasard et simultanément 10 pièces dans le lot.

1. Quelle est la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir une seule pièce défectueuse parmi les 10 ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse parmi les 10 ?

Exercice 18 Au départ d'une course, il y a 16 chevaux.

Gagner le tiercé dans l'ordre consiste à trouver les numéros et l'ordre d'arrivée des trois gagnants. Gagner le tiercé dans le désordre consiste à trouver seulement les numéros des trois gagnants.

On suppose que tous les chevaux ont les mêmes chances de figurer à l'arrivée (ou que je n'y connais strictement rien en tiercé...).

1. Je joue 20 tickets simples différents à 3 chevaux. Quelle probabilité ai-je de gagner le tiercé dans l'ordre ? dans le désordre ?
2. Je joue 1 ticket multiple à 7 chevaux. Quelle probabilité ai-je de gagner le tiercé dans le désordre ?

Une entreprise fabrique des moteurs électriques. Afin de vérifier la conformité des moteurs, on procède à deux tests : l'un de type mécanique, et l'autre de type électrique.

Un moteur est rejeté s'il présente au moins l'un des deux types de défaut. Un moteur est déclaré en parfait état de marche s'il ne présente aucun des deux types de défaut.

Une étude statistique de la production conduit à dégager les résultats suivants :

— la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour le test mécanique est 0,08 ;

— la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour le test électrique est 0,05 ;

— la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour les deux tests est 0,02.

On prélève au hasard un moteur dans la production. On appelle : D_M l'événement "le moteur prélevé présente un défaut de type mécanique", et D_E l'événement "le moteur prélevé présente un défaut de type électrique".

1. a. Les événements D_M et D_E sont-ils indépendants ?

   b. Calculer la probabilité de l'événement D_M sachant que l'événement D_E est réalisé.

2. a. Calculer la probabilité de l'événement A : "le moteur prélevé présente au moins un défaut".

   b. Démontrer que la probabilité de l'événement B : "le moteur prélevé est en parfait état de marche" est de 0,89.

   c. Déterminer la probabilité de l'événement C : "le moteur prélevé présente un seul défaut.

Exercice 20 Lors d'une épidémie, 15% des animaux d'un élevage sont atteints par la maladie. On décide d'effectuer un test de dépistage.

La probabilité qu'un animal atteint par la maladie ait une réaction positive au test est de 0,9.

La probabilité qu'un animal non atteint par la maladie ait une réaction négative au test est de 0,8.

1. Quelle est la probabilité qu'un animal ayant eu un test positif soit réellement atteint par la maladie ?
2. Quelle est la probabilté qu'un animal ayant eu un test négatif soit réellement atteint par la maladie ?
3. Sur un animal dont le test a été négatif, on effectue un deuxième test indépendamment du premier. Ce deuxième test est positif. Quelle est la probabilité pour que l'animal soit malade ?