Transformée de Laplace - Annexe

Théorème **Convergence dominée**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions intégrables sur I telles que :

- *(f_n) converge simplement vers f sur I, i.e.*

$$\forall x \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

- *il existe une fonction g intégrable telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant |g(x)|$$

alors, f est intégrable sur I et,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,dx\right) = \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx = \int_I f(x)\,dx$$

Théorème **Théorème de la valeur finale**

Soit F la transformée de Laplace d'une fonction f, i.e. $F(p) = \mathcal{L}\big[f(t)\mathcal{U}(t)\big]$.
Si les fonctions considérées ont des limites dans les conditions indiquées, on a :

$$\lim_{p\to 0^+} pF(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t) \qquad \textit{(théorème de la valeur finale)}$$

Démonstration: D'après la transformée de Laplace d'une dérivée, on a, $pF(p) = \mathcal{L}\left(f'(t)\right) + f(0^+)$, soit,

$$pF(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)\,e^{-pt}\,dt + f(0^+)$$

et donc,

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{p\to 0}\left[\int_0^{+\infty} f'(t)\,e^{-pt}\,dt\right] + f(0)$$

D'après le théorème de convergence dominée, si ..., on peut alors inverser la limite et l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0} pF(p) &= \int_0^{+\infty} \lim_{p\to 0}\left[f'(t)\,e^{-pt}\right]\,dt + f(0^+)\\
&= \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt + f(0^+)\\
&= \Big[\,f(t)\,\Big]_0^{+\infty} + f(0^+)\\
&= \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0) + f(0)\\
&= \lim_{t\to+\infty} f(t)
\end{aligned}$$

$\square$

Théorème **Stabilité d'un système linéaire**

Soit un système linéaire modélisé par la fonction de transfert dans le domaine de Laplace $H(p)$.
Alors, le système est stable si et seulement si tous les pôles de $H(p)$ sont à partie réelle négative.

Démonstration: La fonction de transfert d'un système linéaire peut s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

où le numérateur $N(p)$ et le dénominateur $D(p)$ sont des polynômes en p.

La stabilité d'un système est définie ainsi : lorsque l'une entrée $e(t)$ est une impulsion de Dirac, alors le système est stable si il retourne à son état au repos après un temps suffisamment long.

Plus précisément, cela s'écrit,

$$\text{si }, e(t) = \delta(t) \ , \quad \text{alors,} \quad \lim_{t\to+\infty} s(t) = 0$$

Si $e(t) = \delta(t)$, alors $E(p) = 1$, et donc $S(p) = H(p)$: la fonction de transfert est la réponse impulsionnelle du système.

Les pôles de $H(p)$ sont les racines de son dénominateur, c'est-à-dire les racines de $D(p)$.
$D(p)$ est un polynôme de degré n, et admet donc n racines, distinctes ou non, complexes :

$$p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n.$$

— Si toutes les racines sont simples (ou 2 à 2 distinctes), on peut décomposer en éléments simples $H(p)$ selon :

$$H(p) = \frac{a_1}{p-p_1} + \frac{a_2}{p-p_2} + \dots \frac{a_n}{p-p_n}$$

Ainsi, en repassant dans le domaine temporel (transfomée de Laplace inverse),

$$H(t) = a_1 e^{-p_1 t}\mathcal{U}(t) + a_n e^{-p_n t}\mathcal{U}(t) + \dots a_n e^{-p_n t}\mathcal{U}(t)$$

Pour $p = \alpha + j\beta$ un nombre complexe (avec $j^2 = -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$), on a

$$e^{-pt} = e^{-(\alpha+j\beta)t} = e^{-\alpha t}\, e^{-j\beta t}$$

et donc, comme $|e^{-j\beta t}| = 1$ pour tout t,

$$\begin{cases} \text{si } \alpha > 0, & \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\alpha t} = 0 \\ \text{si } \alpha < 0, & \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\alpha t} = +\infty \end{cases}$$

et donc, en appliquant cette décomposition à toutes les racines de $D(p)$, si un pôle de $H(p)$ à sa partie réelle négative alors, $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = +\infty$: le système est instable.

— Si un ou plusieurs pôles p_1, p_2,…p_j sont multiples, alors la décomposition en éléments simples de $H(p)$ contient des termes de la forme

$$\frac{a}{(p-p_1)^m}$$

qui donne un terme en temporel de la forme

$$e^{-p_1 t} t^{m-1}\mathcal{U}(t) \ .$$

En décomposant ce pôle p_1 en partie réelle et imaginaire, comme précédement, on aboutit à la même conclusion.

□