Intégrale de Riemann

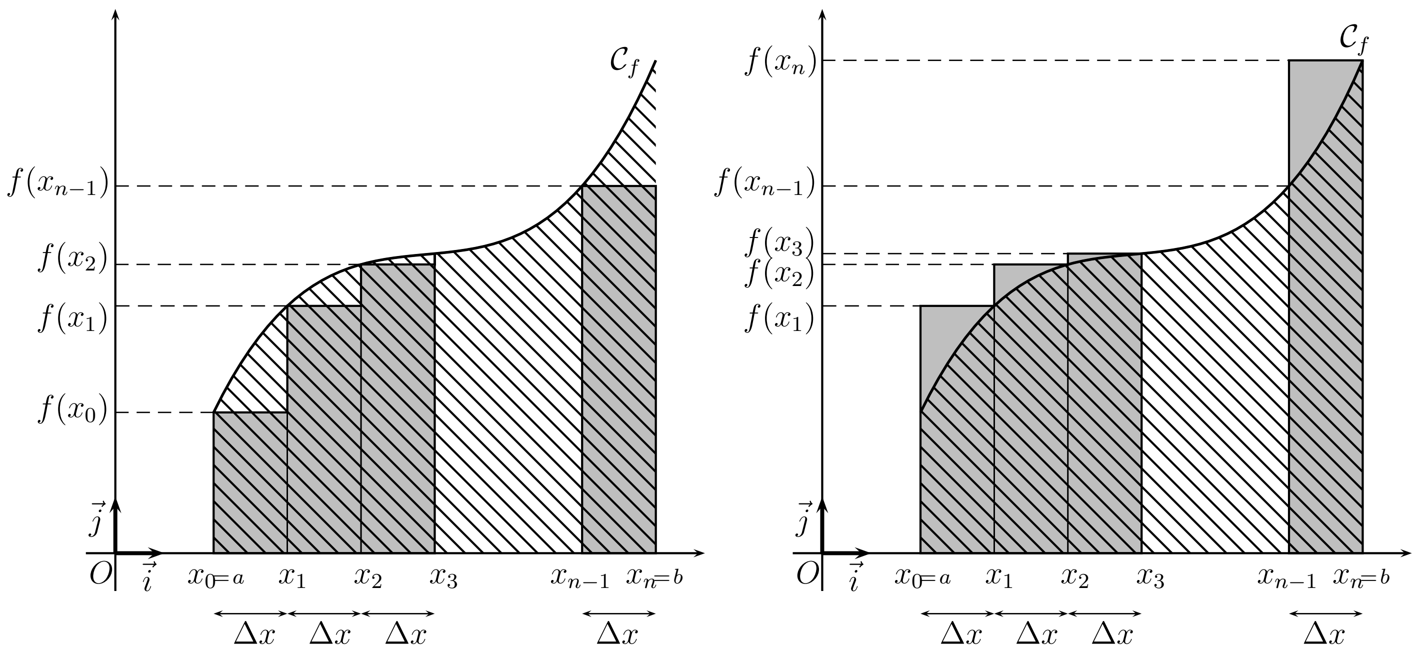
Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. La situation est présentée ci-dessous dans le cas d'une fonction f croissante, et peut se généraliser à une classe bien plus importante de fonctions.

On découpe l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles de longueurs $\Delta_x = \dfrac{b-a}{n}$:

$$[x_0; x_1] \ ; \quad [x_1; x_2] \ ; \quad [x_2; x_3] \ ; \quad \dots \ ; [x_{n-1}; x_n]$$

avec $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta_x$, $x_2 = x_1 + \Delta_x = x_0 + 2\Delta_x$, ...

La suite (x_k) des abscisses est une suite arithmétique de raison Δx. En particulier, pour tout entier k, la $k^{\text{ème}}$ abscisse est $x_k = a + k\Delta x$.



Dans les deux cas, l'aire grisée est la somme des aires de chaque rectangle qui la compose :

$$\begin{aligned} s_n &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ \dots \ + f(x_{n-1})\Delta x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ \dots \ + f(x_n)\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \end{aligned}$$

L'aire hachurée est comprise entre ces deux aires grisées : $s_n \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq S_n$

Ces deux suites (s_n) et (S_n) sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune qui est l'aire recherchée : l'intégrale de f de a à b :

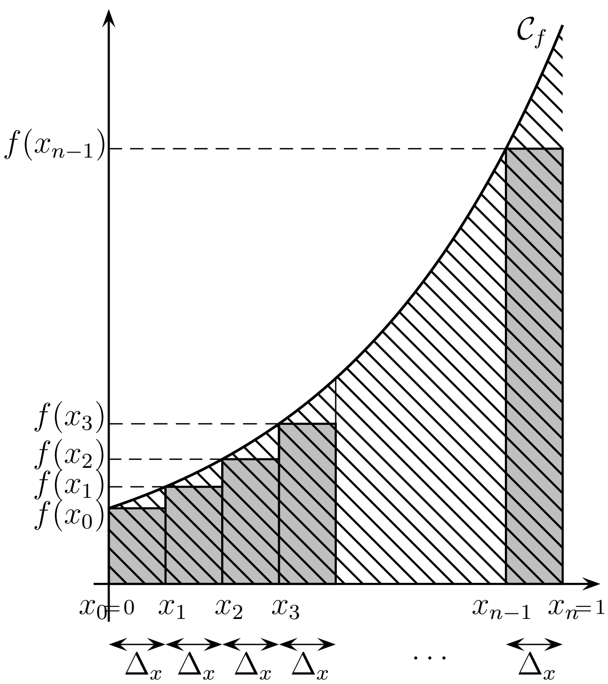
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

Remarque : La notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *(introduite par Leibniz au XVII*^{e} *siècle) s'explique à partir des calculs d'aire précédents, à la limite où* $\Delta_x \to 0$, *et donc* $n \to +\infty$, *notée finalement* dx *(largeur de* *chaque rectangle infinitésimal), et le symbole* $\sum$ *se transformant en* $\int$ *:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta_x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_x$$

En d'autres termes, on passe d'une somme discrète à une somme continue : $\sum f(k)\Delta_x \to \int f(x)\,dx$

Exercice 1 On considère la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ sur $[0;1]$.



La somme des aires de chaque rectangle est :

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_0)\Delta_x + f(x_1)\Delta_x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_x \end{aligned}$$

avec, sur l'intervalle $[0;1]$ découpé en n :

$$\Delta_x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x_k = 0 + k\Delta_x = \frac{k}{n}\ .$$

La somme s'écrit donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$$

1. Soit un nombre réel $q \neq 1$. Donner la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$.

   En déduire une expression de la somme S_n.
2. Rappeler le développement limité à l'ordre 1 de e^u, lorsque u tend vers 0.
   En déduire la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Conclure.

Exercice 2 A l'aide des sommes de Riemann de la fonction proposée, calculer la limite des suites suivantes :

1. $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}$ avec la fonction $f(x) = \sin(x)$.
2. $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n\alpha + k}$ où $(\alpha > 0)$, et avec la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\alpha + x}$
3. $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ avec la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$