

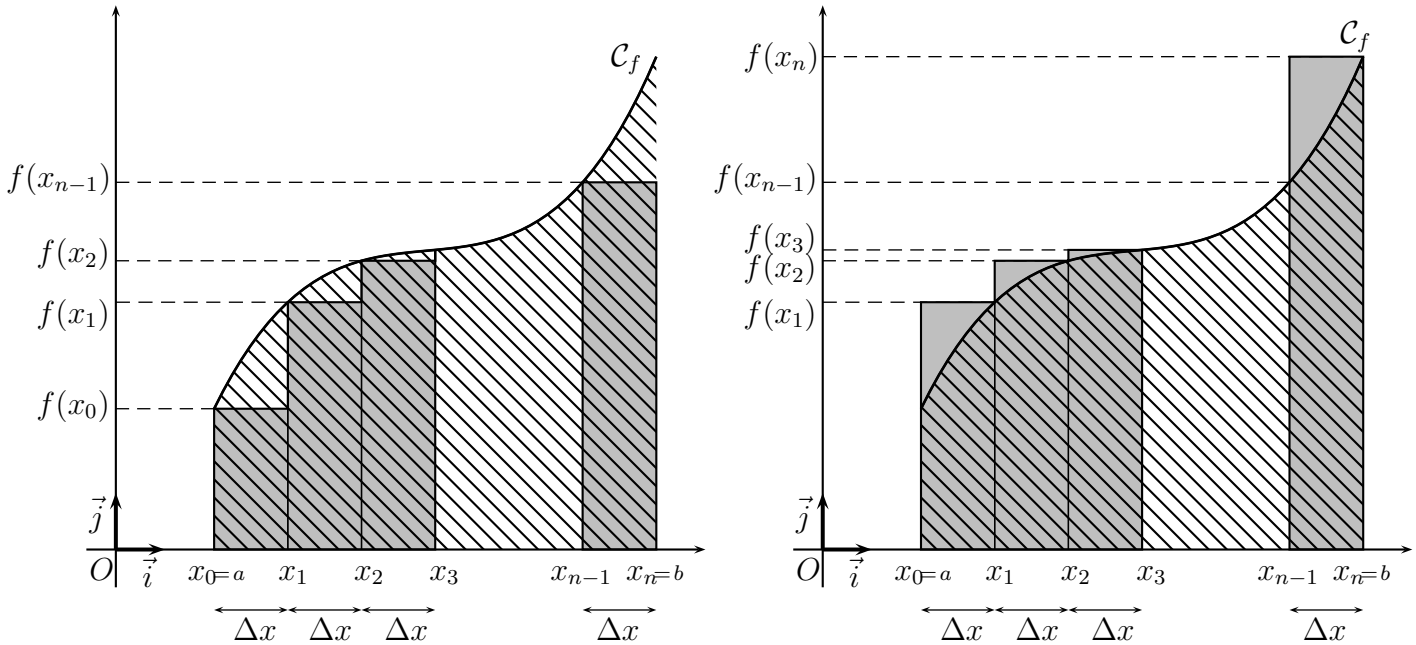
Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$. La situation est présentée ci-dessous dans le cas d'une fonction f croissante, et peut se généraliser à une classe bien plus importante de fonctions.

On découpe l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de longueurs $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$:

$$[x_0; x_1]; [x_1; x_2]; [x_2; x_3]; \dots; [x_{n-1}; x_n]$$

avec $x_0 = a, x_1 = a + \Delta_x, x_2 = x_1 + \Delta_x = x_0 + 2\Delta_x, \dots$

La suite (x_k) des abscisses est une suite arithmétique de raison Δ_x . En particulier, pour tout entier k , la $k^{\text{ème}}$ abscisse est $x_k = a + k\Delta_x$.



Dans les deux cas, l'aire grisée est la somme des aires de chaque rectangle qui la compose :

$$\begin{aligned} s_n &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x & S_n &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x & &= \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x \end{aligned}$$

L'aire hachurée est comprise entre ces deux aires grisées : $s_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_n$

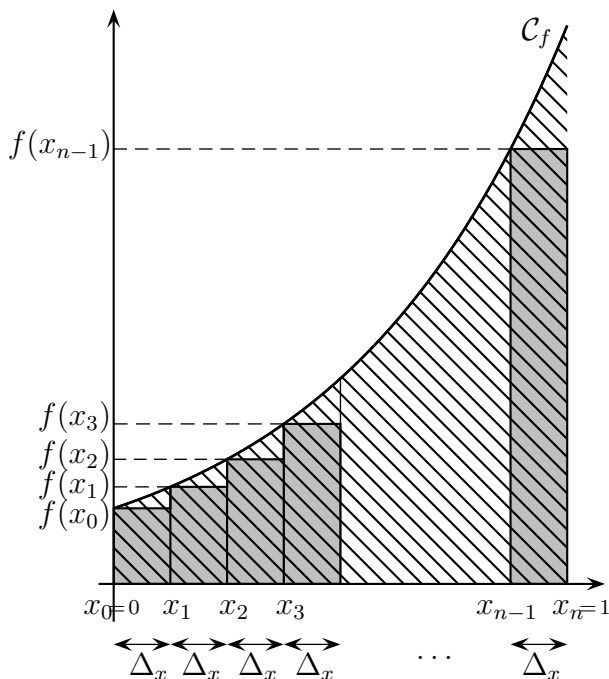
Ces deux suites (s_n) et (S_n) sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune qui est l'aire recherchée : l'intégrale de f de a à b :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$$

Remarque : La notation $\int_a^b f(x) dx$ (introduite par Leibniz au XVII^e siècle) s'explique à partir des calculs d'aire précédents, à la limite où $\Delta_x \rightarrow 0$, et donc $n \rightarrow +\infty$, notée finalement dx (largeur de chaque rectangle infinitésimal), et le symbole \sum se transformant en \int :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta_x$$

Exercice 1 On considère la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ sur $[0; 1]$.



La somme des aires de chaque rectangle est :

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_0)\Delta_x + f(x_1)\Delta_x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_x \end{aligned}$$

avec, sur l'intervalle $[0; 1]$ découpé en n :

$$\Delta_x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x_k = 0 + k\Delta_x = \frac{k}{n}.$$

La somme s'écrit donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$$

1. Soit un nombre réel $q \neq 1$. Donner la somme : $\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$.

En déduire une expression de la somme S_n .

2. Rappeler le développement limité à l'ordre 1 de e^u , lorsque u tend vers 0.

En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

3. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$. Conclure.

Exercice 2 A l'aide des sommes de Riemann de la fonction proposée, calculer la limite des suites suivantes :

1. $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}$ avec la fonction $f(x) = \sin(x)$.

2. $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n\alpha + k}$ où $(\alpha > 0)$, et avec la fonction $f(x) = \frac{1}{\alpha + x}$

3. $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ avec la fonction $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$