Courbes planes

I - Rappel : courbe représentative d'une fonction

Exercice 1 Donner la période, étudier la parité, et calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:
a) $g(t) = \sin^2 t - \cos t$ b) $f(t) = 2\cos t - \cos(2t) + 1$

Exercice 2 Soit la fonction f définie par $f(t) = 6t - 6t^2$.
Etudier le sens de variation de f, puis tracer l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \dfrac{t^2+1}{t}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire quant à $\mathcal{C}_f$ et à l'intervalle d'étude de f.
2. Dresser le tableau de variation de f puis tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4 On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par l'expression : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$.
2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
5. Tracer finalement l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ en utilisant tous les éléments précédents.

II - Représentation paramétrique d'une courbe

1) Définition

Définition *Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
A toute valeur de $t \in I$, on associe le point de coordonnée $(f(t)\,;\,g(t))$; on définit ainsi la fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (f(t)\,;\,g(t)) \end{array} \right. \quad ou, \quad Z : \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t) + jg(t) \end{array} \right.$$

Dans un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, lorsque le paramètre t varie dans I, le point M défini par $\overrightarrow{OM} = f(t)\vec{u} + g(t)\vec{v}$, c'est-à-dire le point M de coordonnées $F(t)$, ou d'affixe complexe $Z(t)$, décrit une courbe plane $\mathcal{C}$.

Les relations $x = f(t)$ et $y = g(t)$ constituent une **représentation paramétrique** *de la courbe $\mathcal{C}$.*

Remarque : En cinématique, le paramètre t représente en général le temps, et les coordonnées du point M à l'instant t sont $F(t) = (x(t)\,;\,y(t))$. La courbe $\mathcal{C}$ est dans ce cas la trajectoire du point.

Exercice 5 Soit dans un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ la courbe $\mathcal{C}$ définie paramétriquement par

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{array} \right. \quad t \in I =]-\pi;\pi]$$

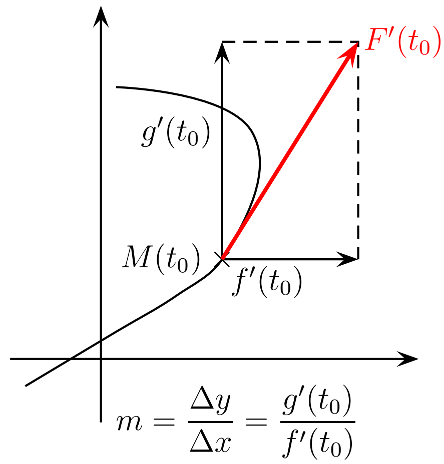
Quel est l'ensemble des points $M\,(x(t);y(t))$ pour $t \in I$?

2) Dérivées et tangentes

Définition *La fonction F est dérivable en t_0 si et seulement si les fonctions f et g sont dérivables en t_0 et alors, le vecteur*

$$F' : t_0 \mapsto \left(f'(t_0)\,;\,g'(t_0)\right)$$

est appelé vecteur dérivé au point $M(t_0)$.



Propriété *Le vecteur dérivé $(f'(t_0)\,;\,g'(t_0))$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$.*

- *Si $f'(t_0) \neq 0$, $m = \dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$ est le coefficient directeur de la tangente en $M(t_0)$.*
- *Si $g'(t_0) = 0$ et $f'(t_0) \neq 0$, la tangente en $M(t_0)$ est horizontale.*
- *Si $f'(t_0) = 0$ et $g'(t_0) \neq 0$, la tangente en $M(t_0)$ est verticale.*

Exemple complet d'étude d'une courbe paramétrée

On cherche à étudier et tracer la courbe définie paramétriquement par $\begin{cases} x &= f(t) &= -6t^3 + 6t^2 \\ y &= g(t) &= -6t^2 + 6t \end{cases}$, pour $t \in I = [0.1]$.

1. **Etude des variations de f et g :**

   Pour tout $t \in I$,

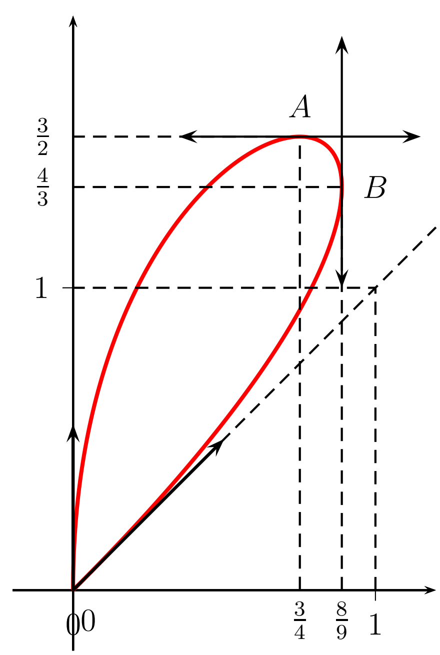
   $$\begin{cases} f'(t) &= -18t^2 + 12t &= 6t(-3t+2) \\ g'(t) &= -12t + 6 &= 6(-2t+1) \end{cases}$$

   On peut alors dresser le tableau des variations de f et g :

t	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(t)$	0	$+$	$\frac{3}{2}$	$+$	0	$-$	-6
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{8}{9}$	$\searrow$	0
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0
$g'(t)$	6	$+$	0	$-$	-2	$-$	-6

2. **Etude des points remarquables de la courbe.**
   Il y a 3 points remarquables (O est un point double) :

   - Pour $t = 0$, $f'(t) = 0$ et $g'(t) \neq 0$: la tangente au point $(0\,;\,0)$ est verticale.
   - Pour $t = \frac{1}{2}$, $g'(t) = 0$ et $f'(t) \neq 0$: la tangente au point $A\left(\dfrac{3}{4}\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$ est horizontale.
   - Pour $t = \frac{2}{3}$, $f'(t) = 0$ et $g'(t) \neq 0$: la tangente au point $B\left(\dfrac{8}{9}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$ est verticale
   - Pour $t = 1$, $m = \dfrac{g'(t)}{f'(t)} = 1$: la tangente au point $(0\,;\,0)$ a pour coefficient directeur $m = 1$.



Exercice 6 Etudier la courbe paramétrique $\mathcal{C}$: $\left\{\begin{array}{lll} x & = f(t) & = 2t^3 - 3t^2 \\ y & = g(t) & = 4t - t^2 \end{array}\right.$

Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal $\left(0; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

3) Réduction de l'intervalle d'étude

De même que pour pour étudier et tracer la courbe représentative d'une fonction, on peut chercher à réduire le domaine d'étude d'une courbe définie par une représentation paramétrique en prenant en compte des éventuelles symétries et périodicités.

a) Périodicité

Si les fonctions f et g sont périodiques de période T (on dit aussi T-périodique), c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t+T) = f(t)$ et $g(t+T) = g(t)$, alors les points de la courbe $M(t)$ et $M(t+T)$ sont confondus : il suffit donc d'étudier et de tracer la courbe sur un intervalle de longueur T, par exemple $[0; T[$, ou $\left[-\dfrac{T}{2}; \dfrac{T}{2}\right[$.

b) Symétries éventuelles

Supposons que l'intervalle de définition de f et g soit centré sur 0, par exemple l'intervalle $I = [-a; a]$ (éventuellement $a = +\infty$). Différents cas peuvent se présenter :

- Pour tout $t \in I$, $\left\{\begin{array}{lll} f(-t) & = & f(t) \quad (f \text{ paire}) \\ g(-t) & = & g(t) \quad (g \text{ paire}) \end{array}\right.$

  Dans ce cas, $M(t)$ et $M(-t)$ sont confondus. La courbe s'obtient intégralement sur l'intervalle $[0; a]$.

- Pour tout $t \in I$, $\left\{\begin{array}{lll} f(-t) & = & f(t) \quad (f \text{ paire}) \\ g(-t) & = & -g(t) \quad (g \text{ impaire}) \end{array}\right.$

  Les points $M(t)$ et $M(-t)$ ont la même abscisse et des ordonnées opposés ; ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
  On étudie donc la courbe sur $[0; a]$, puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

- Pour tout $t \in I$, $\left\{\begin{array}{lll} f(-t) & = & -f(t) \quad (f \text{ impaire}) \\ g(-t) & = & g(t) \quad (g \text{ paire}) \end{array}\right.$

  Les points $M(t)$ et $M(-t)$ ont des abscisses opposées et la même ordonnée ; ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
  On étudie donc la courbe sur $[0; a]$, puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

- Pour tout $t \in I$, $\left\{\begin{array}{lll} f(-t) & = & -f(t) \quad (f \text{ impaire}) \\ g(-t) & = & -g(t) \quad (g \text{ impaire}) \end{array}\right.$

  Les points $M(t)$ et $M(-t)$ ont des abscisses et des ordonnées opposées ; ils sont donc symétriques par rapport à l'origine du repère.
  On étudie donc la courbe sur $[0; a]$, puis on effectue une symétrie par rapport à l'origine du repère.

Exercice 7 Etudier la courbe définie par : $\left\{\begin{array}{l} x = f(t) = \cos t \\ y = g(t) = 2\sin t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la période commune de f et g. En déduire un intervalle d'étude approprié.

2. Etudier la parité des fonctions f et g. En déduire un nouvel intervalle d'étude.
3. Exprimer $f(\pi - t)$ et $g(\pi - t)$ en fonction de $f(t)$ et $g(t)$.
   En déduire un élément de symétrie de la courbe et l'intervalle d'étude sur lequel il est suffisant de l'étudier.
4. Etudier les variations de f et g et regrouper les résulats dans un tableau commun.
5. Préciser les points de la courbe où la tangente est parallèle à un des axes du repère.
6. Tracer la courbe dans un repère orthonormal.

Exercice 8 **Courbe de Lissajous**[1]

Soit un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 5cm, et la courbe de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lll} x & = f(t) & = 2\cos t \\ y & = g(t) & = \sin(2t) \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. a. Donner la période commune aux deux fonctions.
   b. Etudier la parité des deux fonctions, et en déduire un élément de symétrie de la courbe.
   c. Calculer $f(\pi - t)$ et $g(\pi - t)$. Que peut-on en déduire pour les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$?
   d. Déduire de ce qui précède l'intervalle d'étude de f et g.
2. Etudier les variations de f et g sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, puis dresser le tableau de variations conjointes de f et g.
3. Préciser les points où la courbe $\mathcal{C}$ admet des tangentes parallèles aux axes du repère.
4. Construire la courbe.

Exercice 9 **Autre exemple de courbe de Lissajous**

Sur l'écran d'un oscilloscope, on observe une courbe $\mathcal{C}$ décrite par un spot dont les coordonnées dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 5cm s'expriment en fonction du temps t par : $\left\{\begin{array}{lll} x & = f(t) & = 2\cos(3t) \\ y & = g(t) & = \sin(2t) \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que l'ensemble de la courbe $\mathcal{C}$ est obtenue pour $t \in [0; 2\pi]$.
2. a. Calculer $f(-t)$ et $g(-t)$. Que peut-on en conclure pour la courbe ?
   b. Calculer $f(\pi - t)$ et $g(\pi - t)$. Que peut-on en conclure pour la courbe ?
   c. Justifier que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Préciser les transformations géométriques qui permettent de construire la courbe $\mathcal{C}$ à partir de l'arc $\mathcal{C}_0$ relatif à $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
3. Donner le tableau de variation de f et de g sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
4. Tracer $\mathcal{C}_0$; on précisera les points de $\mathcal{C}_0$ où la tangente est parallèle à un des axes de coordonnées.
   Tracer $\mathcal{C}$ sur $[0; \pi]$ puis sur $[-\pi; \pi]$.

---

1. Une courbe de Lissajous, aussi connue sous le nom de courbe de Bowditch, est la trajectoire d'un point dont les coordonnées cartésiennes ont un mouvement sinusoïdal.

Cette famille de courbes fut étudiée par Nathaniel Bowditch en 1815, puis plus en détail par Jules Lissajous en 1857.

Les courbes de Lissajous peuvent s'observer par exemple sur un oscilloscope analogique, en mode XY, dans le but notamment de mesurer un déphasage et une différence de fréquence entre deux signaux sinusoïdaux.

Exercice 10 **D'après BTS** Soit les fonctions numériques x et y de la variable réelle positive t.
On se propose d'étudier une solution du système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) - \mathcal{U}(t) \\ x(0) = 1 \ ; \ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. On suppose que la méthode utilisant la transformation de Lapalce est applicable pour la résolution de ce système. En utilisant cette méthode, et en notant X et Y les transformées de Laplace de x et y déterminer le système d'équation vérifié par X et Y. Résoudre ce système.
2. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$ et $\dfrac{p^2+p+2}{p(p^2+1)}$.
   Déterminer les fonctions x et y solutions du système différentiel.
3. On considère la courbe (C) définie par le système d'équations paramétriques :

   $$\begin{cases} x(t) = 2 + \sin t - \cos t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

   Montrer que l'on peut obtenir toute la courbe (C) à partir de l'étude des fonctions x et y sur $[0; 2\pi]$.
   Etudier les fonctions x et y sur cet intervalle et regrouper les résultats dans un même tableau.
   Préciser les points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à l'un des axes du repère.
   Tracer la courbe (C) dans un repère orthogonal (unité graphique 5cm).

Exercice 11 On se propose d'étudier une solution du système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) = 0 \\ x(t) - y'(t) = t\,\mathcal{U}(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. On suppose que la méthode utilisant la transformation de Laplace est applicable pour la résolution de ce système.
   En utilisant cette méthode et en notant X et Y les transformées de Laplace de x et y déterminer le système d'équations vérifié par X et Y puis résoudre ce système.
2. a. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1-p^2}{p^2(p^2+1)}$ et $\dfrac{p^2-1}{p(p^2+1)}$.
   b. Déterminer les fonctions x et y solutions du système différentiel.
3. Dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère la courbe (C) définie par le système d'équations paramétriques :

   $$\begin{cases} x(t) = t - 2\sin t \\ y(t) = -1 + 2\cos t \end{cases}$$

   (a) Etudier les fonctions x et y sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ et regrouper les résultats dans un même tableau.
   (b) Préciser les points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à l'un des axes du repère.
   (c) Montrer que le point $M'(t + 2\pi)$ se déduit du point $M(t)$ par une translation de vecteur $2\pi\vec{u}$.
   (d) Tracer la courbe (C) pour $t \in [0; 4\pi]$ dans le repère orthonormal donné.

Exercice 12 **D'après BTS**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique 5cm). On considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par la représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lll} x & = f(t) & = (2+\cos(2t))\sin(t) \\ y & = g(t) & = \cos(t) \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f et g sont périodiques de période 2π. On limitera l'étude à l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
2. Etudier la parité de chacune des fonctions f et g. En déduire un élément de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Calculer $f(\pi-t)$ et $g(\pi-t)$. En déduire un autre élément de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.
4. a. Montrer que $f'(t) = 3\cos(t)\cos(2t)$.

   b. Etudier les variations de f et g sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Préciser les tangentes parallèles aux axes.

   Tracer la partie de la courbe $\mathcal{C}$ correspondant à cet intervalle, puis, à l'aide des symétries mises en évidences aux questions 2. et 3., tracer $\mathcal{C}$.
5. On démontre que l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$ est donnée par la formule :

$$a = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(t)g'(t)|\,dt\ .$$

   (on ne demande pas d'établir cette formule).

   a. Préciser le signe de $f(t)$ et de $g'(t)$ lorsque t appartient $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et montrer que a est l'intégrale sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction h telle que : $h(t) = 8\sin^2(t) + 4\sin^2(t)\cos(2t)$.

   b. Linéariser la fonction h et en déduire l'aire a.

Exercice 13 **D'après BTS**

Partie A. Le système différentiel régissant un filtre est : $(S)\left\{\begin{array}{l} v_s(t) + RC_2 v_s'(t) = f(t) \\ v_e(t) = f(t) + R(C_2-C_1)v_s'(t) + RC_1 f'(t) \end{array}\right.$

R, C_1 et C_2 étant des constantes réelles strictement positives; v_s, v_e et f sont des fonctions de la variable réelle t nulles pour t négatif et admettant des transformées de Laplace notées respectivement V_s, V_e et F.

De plus, on suppose que $v_s(0^+) = f(0^+) = 0$.

1. Appliquer la transformée de Laplace au système (S).
2. Exprimer $V_e(p)$ en fonction de $V_s(p)$. En déduire l'expression de H, fonction de transfert du filtre, définie par $H(p) = \dfrac{V_s(p)}{V_e(p)}$.
3. On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$ et $m = \sqrt{\dfrac{C_2}{C_1}}$. Vérifier que $H(p) = \dfrac{1}{1+2m\dfrac{p}{\omega_0}+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$

Partie B.

ω est un nombre réel décrivant l'intervalle $[0;+\infty[$.

On se propose de représenter l'ensemble des points d'affixe $H(j\omega)$ dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 4cm.

1. On donne $C_1 = 2C_2$ et pour simplifier les calculs on pose $s = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. Montrer alors que :

$$H(j\omega) = H(j\omega_0 s) = h(s) = \frac{1}{1+j\sqrt{2}s-s^2}\ .$$

2. Ecrire $h(s)$ sous la forme $h(s) = x(s) + jy(s)$, où x et y sont des fonctions de la variable réelle positive ou nulle s.

3. On donne les tableaux de signes suivants :

s	0		$\sqrt{1+\sqrt{2}}$		$+\infty$
$s^4 - 2s^2 - 1$		$-$	0	$+$	

s	0		$\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$3s^4 - 1$		$-$	0	$+$	

Soit $\mathcal{C}$ la courbe définie par la représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x(s) = \dfrac{1-s^2}{1+s^4} \\ y(s) = \dfrac{-s\sqrt{2}}{1+s^4} \end{array}\right. \quad s \in [0;+\infty[$

Donner les limites des fonctions x et y en $+\infty$, et calculer $x(0)$ et $y(0)$.

Calculer les dérivées des fonctions x et y, puis établir le tableau des variations conjointes de x et y. On donnera des valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près des coordonnées des points remarquables.

4. Préciser la direction de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ aux points de paramètre $s = 0$, $s = \sqrt{\sqrt{\dfrac{1}{3}}}$, et $s = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

III - Représentation polaire d'une courbe

1) Définition

On considère une courbe plane, ensemble des points $M(x;y)$, définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$.

La courbe est aussi l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z = f(t) + jg(t)$. On peut alors écrire le nombre complexe $z = f(t) + jg(t)$ sous forme exponentielle : $z = \rho(t)e^{j\theta(t)}$, avec $|z(t)| = \rho(t) \geqslant 0$ et $\arg(z(t)) = \theta(t)$.

La courbe est alors définie par les deux fonctions ρ et θ.

Inversement, connaissant le module $\rho(t)$ et l'argument $\theta(t)$, on peut se ramener à une représentation paramétrique par :

$$\begin{cases} f(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \\ g(t) = \rho(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

Remarque : Puisque $\rho(t) = \sqrt{f^2(t) + g^2(t)}$ est un module, le repère utilisé pour tracer la courbe est nécessairement **orthonormal**.

2) Tangente à la courbe

La courbe (C) de représentation polaire $t \mapsto \rho(t)e^{j\theta(t)}$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = \rho(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

La tangente au point $M(t_0)$ a pour vecteur directeur

$$\begin{cases} x'(t) = \rho'(t)\cos\theta(t) - \rho(t)\theta'(t)\sin\theta(t) \\ y'(t) = \rho'(t)\sin\theta(t) + \rho(t)\theta'(t)\cos\theta(t) \end{cases}$$

Ainsi,

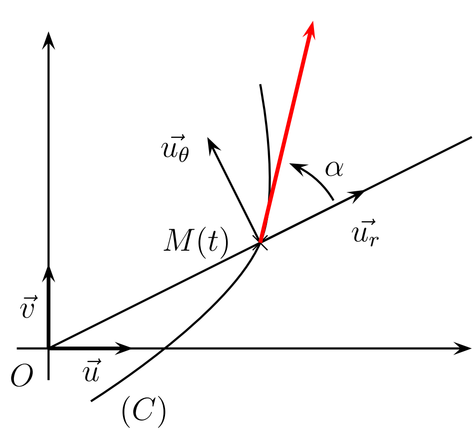
$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} &= x'(t)\vec{u} + y'(t)\vec{v} \\ &= \left[\rho'(t)\cos\theta(t) - \rho(t)\theta'(t)\sin\theta(t)\right]\vec{u} + \left[\rho'(t)\sin\theta(t) + \rho(t)\theta'(t)\cos\theta(t)\right]\vec{v} \\ &= \rho'(t)\left[\cos\theta(t)\vec{u} + \sin\theta(t)\vec{v}\right] + \rho(t)\theta'(t)\left[-\sin\theta(t)\vec{u} + \cos\theta(t)\vec{v}\right] \\ &= \rho'(t)\vec{u_r} + \rho(t)\theta'(t)\vec{u_\theta} \end{aligned}$$

où $(\vec{u_r};\vec{u_\theta})$ est le repère polaire associé au point $M(t)$:

Propriété *Si ρ et θ sont dérivables, alors (C) admet au point $M(t)$ d'affixe $\rho(t)e^{j\theta(t)}$ une tangente dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(\rho'(t)\,;\,\rho(t)\theta'(t))$ dans le repère $(\vec{u_r}\,;\,\vec{u_\theta})$.*

Si on note α l'angle que fait alors cette tangente avec la droite $(OM(t))$, alors on a :

$$\tan\alpha = \frac{\rho(t)\theta'(t)}{\rho'(t)}.$$



Remarque : Si $\rho'(t_0)=0$, la tangente en $M(t_0)$ est perpendiculaire à $(OM(t_0))$.

Exemple complet d'étude d'une courbe définie par une représentation polaire

Soit la courbe définie par $\left\{\begin{array}{l}\rho(t)=\dfrac{1}{1+t^2}\\ \theta(t)=-2\arctan t\end{array}\right.$, pour $t\in[0;+\infty[$.

• Etude des fonctions ρ et θ : $\left\{\begin{array}{l}\rho'(t)=\\ \theta(t)=\end{array}\right.$, pour $t\in[0;+\infty[$.

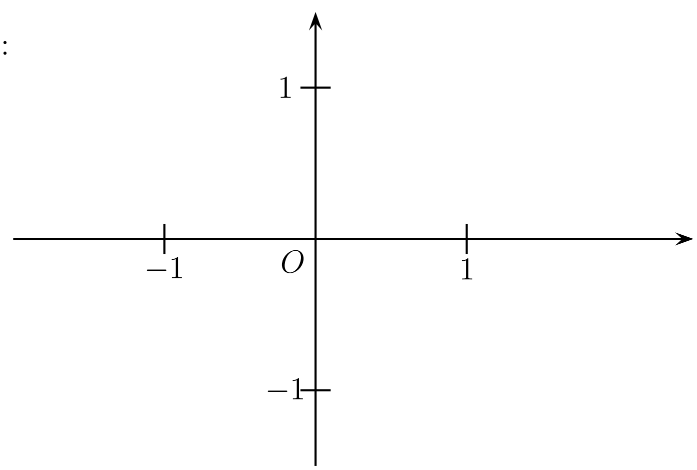
Compléter le tableau (avec les limites) :

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\rho'(t)$	
ρ	
$\theta'(t)$	
θ	

• Points remarquables :
Pour $t=0$, $\rho(0)=\ \dots$ et $\theta(0)=\ \dots$, donc on est au point $A\Big(\quad;\quad\Big)$.
De plus, $\rho'(0)=\ \dots$ et $\rho(0)\theta'(0)=\ \dots$, et donc la tangente en A est $\quad\dots\quad$.
Pour $t=1$, $\rho(1)=\ \dots$, et $\theta(1)=\ \dots$, donc on est au point $B\Big(\quad;\quad\Big)$.

A la limite, $t\to+\infty$, $\rho(t)\to\ \dots$, et $\theta(t)\to\ \dots$.
Le "point limite" est donc $C\Big(\quad;\quad\Big)$, avec une tangente $\quad\dots\quad$.

• Tracé de la courbe :



Exercice 14 Soit la courbe $\mathcal{C}$, ensemble des points $M(t)$ d'affixe $z(t)=t^2e^{j\frac{1}{2}\arccos t}$, pour $t\in[-1;1]$.

1. Etudier sur l'intervalle $[-1;1]$ les fonctions θ et ρ définies par $\left\{\begin{array}{l}\rho(t)=t^2\\ \theta(t)=\dfrac{1}{2}\arccos t\end{array}\right.$
2. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Exercice 15 *D'après BTS*

Le but de l'exercice est le tracé du lieu de transfert du filtre passe-bas dont la fonction H de ce filtre est donné par : $H(p) = \dfrac{1}{(RCp+1)^2}$.

On supposera par la suite que $RC = 1$. Soit ω un nombre réel positif.

1. Calculer en fonction de ω le module du nombre complexe $H(j\omega)$, ce module sera noté $|H(j\omega)|$.
2. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(\omega) = |H(j\omega)|$.
   Préciser $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$. Etudier les variations de f et donner son tableau de variation.
3. Montrer que l'on peut trouver un argument du nombre complexe $1+j\omega$ dans l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   Exprimer cet argument en utilisant la fonction arctangente.
   En déduire que l'argument du nombre complexe $H(j\omega)$ dans l'intervalle $]-\pi; 0]$ est $g(\omega) = -2\arctan\omega$.
4. Préciser $g(0)$ et la limite de g en $+\infty$. Etudier les variations de g et donner son tableau de variations.
5. Le lieu de transfert de ce filtre est la courbe décrite, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, par le point d'affixe $H(j\omega)$ lorsque ω parcourt $[0; +\infty[$.
   C'est donc la courbe de représentation polaire $\omega \mapsto f(\omega)e^{jg(\omega)}$ où f et g sont les fonctions définies précédemment.
   En utilisant les questions 2. et 4. tracer le lieu de transfert de ce filtre.

Exercice 16 Un système asservi par un régulateur de gain G admet en boucle ouverte la fonction de transfert suivante : $A(p) = \dfrac{Gk}{p(\theta p+1)^2}$, dans laquelle G, k, θ sont des constantes positives du système et p le nombre complexe défini par $p = j\omega$ avec $\omega \in]0; +\infty[$.

On s'intéresse au lieu de transfert de Nyquist qui est l'ensemble (C) des points M du plan complexe dont l'affixe est $A(j\omega)$.

Ce lieu de transfert est donc, suivant le point de vue adopté, soit la courbe paramétrée définie par la fonction $\omega \mapsto \mathcal{R}e(A(j\omega)) + j\mathcal{I}m(A(j\omega))$ soit (ce qui revient au même) la courbe paramétrée définie par la fonction $\omega \mapsto |A(j\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)}$ où $\varphi(\omega)$ représente un argument de $A(j\omega)$.

1. a. Déterminer la partie réelle $X(\omega)$ et la partie imaginaire $Y(\omega)$ du nombre complexe $A(j\omega)$.
   b. Calculer $\lim\limits_{\omega\to 0^+} X(\omega)$ et $\lim\limits_{\omega\to 0^+} Y(\omega)$. En déduire que le lieu de transfert de Nyquist possède une asymptote verticale d'équation $x = -2G\theta Gk$.
2. a. Montrer que le module $r(\omega)$ du nombre complexe $A(j\omega)$ est : $r\omega) = \dfrac{Gk}{\omega(1+\theta^2\omega^2)}$.
   b. Montrer qu'un argument $\varphi(\omega)$ du nombre complexe $A(j\omega)$ est : $\varphi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2} - 2\arctan(\theta\omega)$.
3. a. Etudier les variations de la fonction $\omega \mapsto r(\omega)$ pour $\omega \in]0; +\infty[$. On précisera les limites lorsque ω tend vers 0 par valeurs positives et lorsque ω tend vers $+\infty$.
   b. Etudier les variations de la fonction $\omega \mapsto \varphi(\omega)$ pour $\omega \in]0; +\infty[$. On précisera les limites lorsque ω tend vers 0 par valeurs positives et lorsque ω tend vers $+\infty$.
   c. Donner un tableau de variations conjointes des fonctions $\omega \mapsto r(\omega)$ et $\omega \mapsto \varphi(\omega)$ pour $\omega \in]0; +\infty[$.
4. Par un procédé classique d'identification, on a obtenu $k = 0,08$ et $\theta = 20$. On prend un gain $G = 1$.

   a. Déterminer la valeur ω_0 de ω telle que $\varphi(\omega_0) = -\pi$. En déduire la valeur de $r(\omega_0)$.

b. Tracer la courbe (C). On utilisera le résultat de la question 1. et le tableau suivant dans lequel les données numériques sont des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.

$\varphi(\omega)$	$-\dfrac{2\pi}{3}$	$-\dfrac{3\pi}{4}$	$-\dfrac{5\pi}{6}$	$-\pi$	$-\dfrac{7\pi}{6}$	$-\dfrac{4\pi}{3}$
$r(\omega)$	5,57	3,30	2,08	0,80	0,23	0,03