

Soit X une variable aléatoire discrète suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

On se place dans le cas où $n \rightarrow +\infty$, $p \rightarrow 0$ et le produit $np = a > 0$.

On a alors, pour $0 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

soit, en posant $np = a \iff p = \frac{a}{n}$,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} p^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n^k \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{(np)^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, tous les facteurs $\left(1 - \frac{i}{n}\right)$, $1 \leq i \leq k-1$, tendent vers 1, et donc,

$$P(X = k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(np)^k}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

De plus,

$$(1-p)^{n-k} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-k}$$

avec, pour k un entier fixé,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-k} = 1$$

Pour le deuxième terme, on utilise le lemme suivant :

Lemme Soit $a \in \mathbb{R}$, alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}$$

Démonstration: On écrit $\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right)}$.

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\frac{a}{n} \rightarrow 0$, et alors on a $\ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a}{n}$.

Ainsi,

$$\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{n\left(-\frac{a}{n}\right)} = e^{-a}$$

□

On aboutit alors à :

$$(1-p)^{n-k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-a}$$

ce qui nous permet d'affirmer que :

$$P(X = k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(np)^k}{k!} e^{-a} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

$\mathcal{P}(a)$ de paramètre $\lambda = a = np$.

En pratique, on applique cette approximation dès que $n \geq 50$ et $p < 0,1$, ou encore dès que $n > 30$ et $np < 5$.