Fonctions d'une variable réelle
BTS

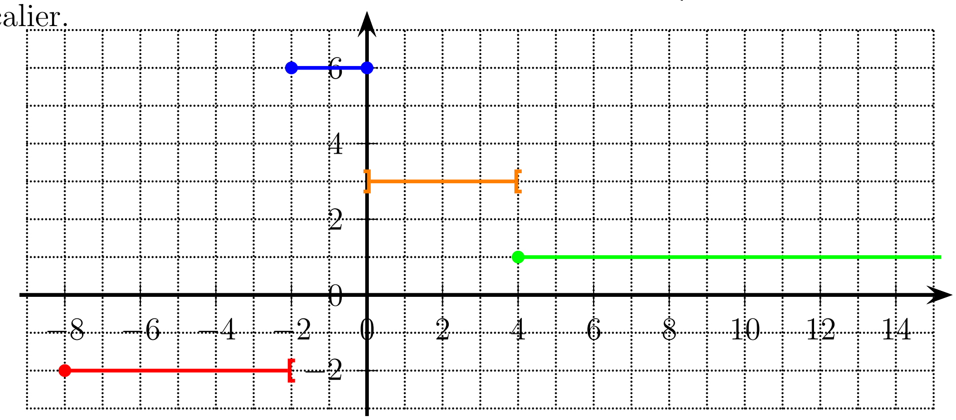
Table des matières

1 Fonctions usuelles

1.1 Fonctions en escalier

Définition *Une fonction en escalier est une fonction constante par intervalles.*

Exercice 1 La fonction définie sur $[-8\,;+\infty\,[$ par $f(x)=\begin{cases}-2 & \text{si} \quad -8\leq x<-2\\ 6 & \text{si} \quad -2\leq x\leq 0\\ 3 & \text{si} \quad 0<x<4\\ 1 & \text{si} \quad 4\leq x\end{cases}$ est une fonction en escalier.



1.2 Fonctions affines

Définition *a et b sont deux réels donnés. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ est appelée <u>fonction affine</u>.*
Sa représentation graphique est la droite d'équation $y=ax+b$, où :
- *Le réel a est le coefficient directeur de cette droite.*
- *Le réel b est l'ordonnée à l'origine.*

Une fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x)=a$. D'où les tableaux de variation suivants :

$a>0$

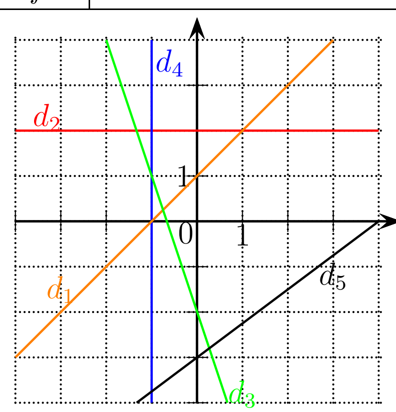
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
signe de f	$-$	0	$+$

$a<0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$
signe de f	$-$	0	$+$

Exercice 2 Le graphique ci-contre représente les droites d'équation :

$d_1 : y=x+1$
$d_2 : y=2$
$d_3 : y=-3x-2$
$d_4 : x=-1$
$d_5 : y=\dfrac{3}{4}x-3$



1.3 Fonction logarithme

Définition *La fonction logarithme népérien, notée* ln, *est l'unique primitive de la fonction* $x \to \dfrac{1}{x}$ *définie sur* $]\,0\,;\,+\infty\,[$ *qui s'annule en* 1.

Conséquences directes :
- $\ln(1) = 0$,
- la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété *Soit a et b deux réels strictement positifs et n est un entier naturel, alors :*

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

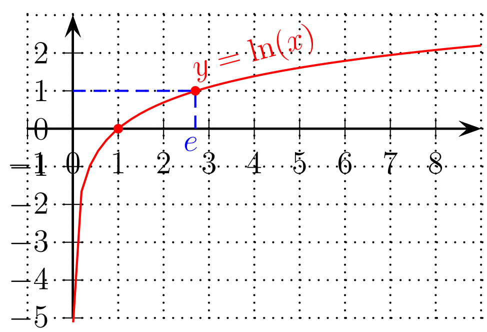
Exercice 3 Transformations d'expressions numériques et algébriques :
- $\ln\left(\dfrac{192}{108}\right) = \ln\left(\dfrac{16}{9}\right) = \ln(16) - \ln(9) = \ln(2^4) - \ln(3^2) = 4\ln(2) - 2\ln(3)$.
- $\ln(\sqrt{96}) = \dfrac{1}{2}\ln(96) = \dfrac{1}{2}\ln(2^5 \times 3) = \dfrac{1}{2}[5\ln(2) + \ln(3)]$.
- $\ln(x+3) + \ln(2x+1) = \ln[(x+3)(2x+1)] = \ln(2x^2 + 7x + 3)$ pour $x \in -\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Propriété • $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Conséquence graphique : La droite $x = 0$ est donc asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln.

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
signe	$-$	0	$+$



1.4 Fonction exponentielle

Définition *La fonction exponentielle est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\exp(x) = e^x$, e^x *étant l'unique nombre réel positif dont le logarithme vaut* x.

Remarque : *Les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques l'une de l'autre :*

$$\text{Pour tous réels } x \text{ et } y > 0, \qquad y = e^x \iff \ln(y) = x \quad \text{et} \quad \ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad e^{\ln y} = y$$

Graphiquement, les courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$) dans un repère othonormal.

Conséquences directes : • $\exp(x) = e^x > 0$ et $\exp(1) = e^1 = e \approx 2,718$.

Propriété *Soient a et b deux réels et n est un entier relatif, alors :*

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$ • $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ • $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$ • $(e^a)^n = e^{an}$.

Exercice 4 Transformations d'expressions numériques et algébriques :

— $e^2 \times e^3 \times \dfrac{1}{e^4} \times (e^{-2})^{-3} = e^{2+3-4+6} = e^7$.

— $e^{x+3} \times e^{2x+1} = e^{(x+3)+(2x+1)} = e^{3x+4}$.

— $(e^{x-2})^2 = e^{2x-4}$.

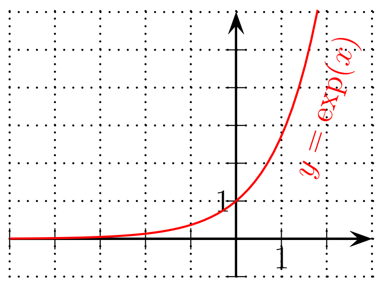
Propriété • $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. • $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Conséquence graphique : La droite d'équation $y = 0$ est donc une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction exp.

Propriété *La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $(e^x)' = e^x$.*

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$0 \nearrow +\infty$
signe	$+$



1.5 Fonctions puissance

Définition *Soit α un nombre réel, la fonction puissance (d'exposant) α, notée f_α est la fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe*

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Exercice 5 Dans le cas où $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on a $f_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln x} = \sqrt{x}$.

Propriété *Pour tout α, la fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.*

Sens de variation :

Dans le cas où $\alpha = 0$, la fonction $f_0(x) = x^0 = 1$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans le cas où $\alpha \neq 0$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ est du signe de α sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'où les tableaux de variation suivants :

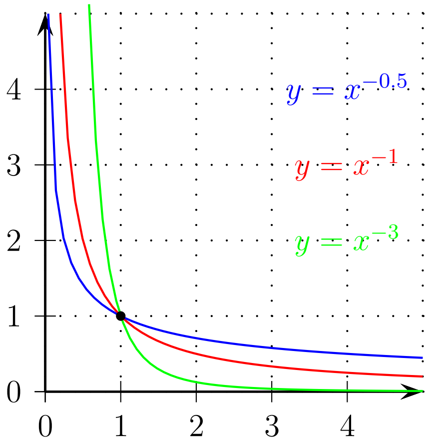
$\alpha < 0$

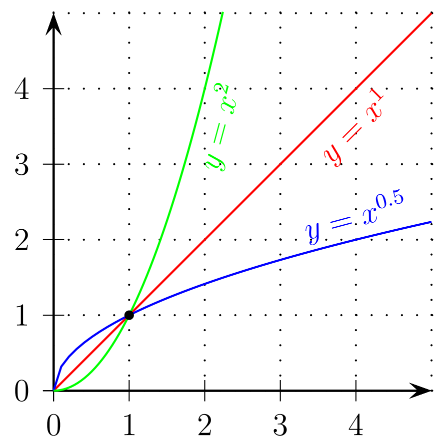
x	0 $+\infty$
signe de $f'_\alpha(x)$	$-$
variations de f_α	$+\infty \searrow 0$
signe de f_α	$+$

$\alpha > 0$

x	0 $+\infty$
signe de $f'_\alpha(x)$	$+$
variations de f_α	$0 \nearrow +\infty$
signe de f_α	$+$

Allure des courbes représentatives des fonctions puissance :

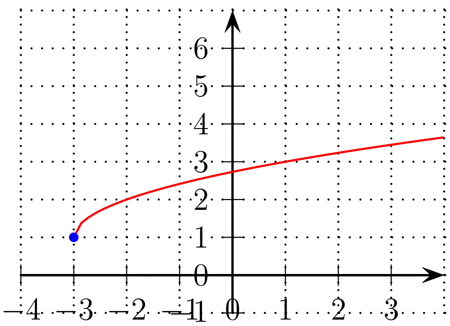




2 Limites

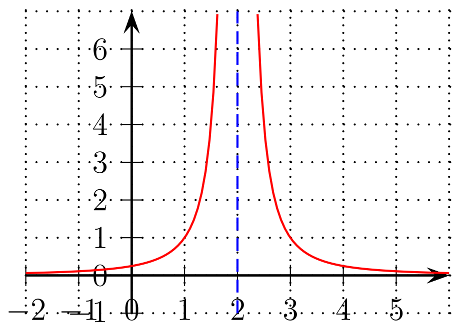
2.1 Interprétation graphique

Limite en un point :



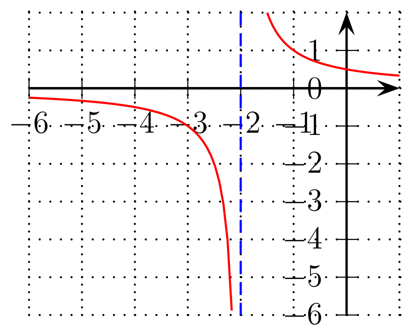
$$\lim_{x\to -3} f(x) = 1$$

Il n'y a pas d'asymptote.



$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$$

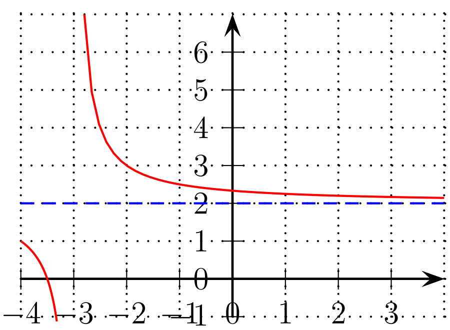
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.



$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$$

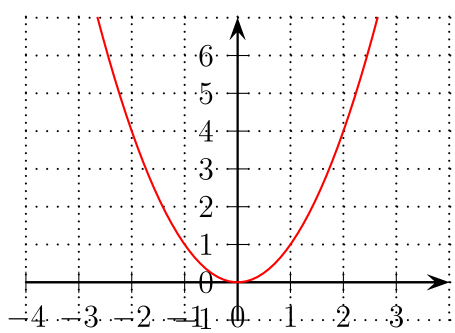
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

Limite en ∞ :



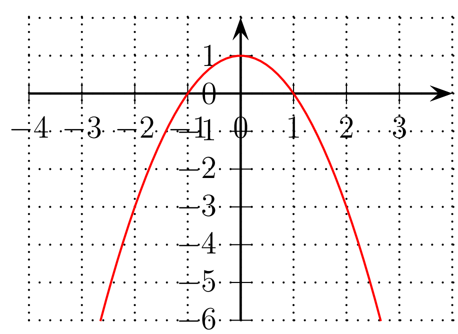
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.



$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Il n'y a pas d'asymptote.



$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

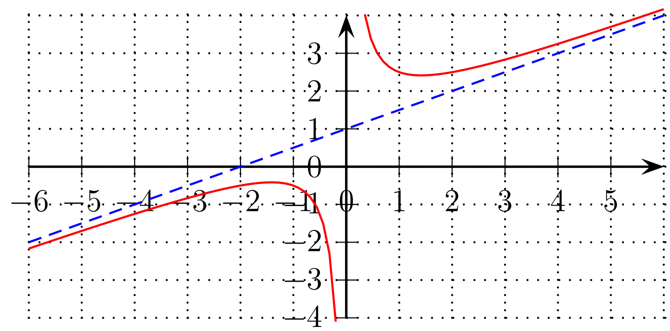
Il n'y a pas d'asymptote.

Définition *Soit f une fonction et d la droite d'équation $y = ax + b$ tel que :*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \Big[f(x) - (ax+b)\Big] = 0$$

on dit alors que la droite d est une <u>asymptote oblique</u> à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x + 1$.



On a $f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) = \dfrac{1}{x}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x+1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Ainsi la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

2.2 Limites des fonctions usuelles

Voici un tableau qui résume les différentes limites des fonctions de référence (la notation « $*$ »signifie qu'il faut appliquer la « règle des signes »).

$f(x)$	x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$	x^α, $\alpha > 0$	$\dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$	$\ln x$	$\exp x$	$\cos x$	$\sin x$
$\lim\limits_{x\to-\infty}$	$*\infty$	0^*	indéfini	indéfini	indéfini	0^+	aucune	aucune
$\lim\limits_{x\to0^-}$	0^*	$*\infty$	indéfini	indéfini	indéfini	1^-	1^-	0^-
$\lim\limits_{x\to0^+}$	0^+	$+\infty$	0^+	$+\infty$	$-\infty$	1^+	1^+	0^+
$\lim\limits_{x\to+\infty}$	$+\infty$	0^+	$+\infty$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	aucune	aucune

2.3 Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, la notation « FI » désigne une Forme Indéterminée, c'est à dire qu'on ne sait pas déterminer directement, sans autre calcul, par une règle élémentaire.

2.3.1 Limite d'une somme

$\lim f$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim (f+g)$	$l+l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exercice 7 Calcul de « sommes » de limites :

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0} e^x & = & 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} x^3 & = & 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} (e^x + x^3) = 1.$
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^- \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} + x^2\right) = +\infty$
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x + x^2) = +\infty.$
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to -\infty} x & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} (x + x^3) = -\infty.$
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 + x^3)$ est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

2.3.2 Limite d'un produit

$\lim f$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim (f\times g)$	$l\times l'$	$*\infty$	$*\infty$	FI

Exercice 8 Calcul de « produit » de limites :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0} (e^x+3) & = & 4 \\ \lim\limits_{x\to 0} (e^x-2) & = & -1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} [(e^x+3)\times(e^x-2)] = -4.$
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0^+} (x-3) & = & -3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0^+} \left[(x-3)\times\dfrac{1}{x}\right] = -\infty$
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to -\infty} (x-1) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} [(x-1)\times x^3] = +\infty.$
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^- \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} \left[(x^2+1)\times\dfrac{1}{x}\right]$ est une forme indéterminée du type $0\times\infty$.

2.3.3 Limite d'un quotient

$\lim f$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim \left(\dfrac{f}{g}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$*\infty$	$*\infty$	FI	FI

Exercice 9 Calcul de « quotients » de limites :

— $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0} (e^x+3) & = & 4 \\ \lim\limits_{x\to 0} e^x-2) & = & -1 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x+3}{e^x-2}\right) = e^5$.

— $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}-3\right) & = & -3 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\frac{1}{x}-3}{x^2}\right) = 0^-$.

— $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0^+} x-4 & = & -4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x & = & 0^+ \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x-4}{x}\right) = -\infty$.

— $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x-1) & = & -1 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right) = +\infty$.

— $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to -\infty} (x-1) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x-1}{x^3}\right)$ est une forme indéterminée.

— $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0} x^2 & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} & = & 0 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}\right)$ est une forme indéterminée .

2.3.4 Compositions

Propriété *Soient deux fonctions : f définie de I dans J et g de J dans $\mathbb{R}$.*

Si $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = c \end{array}\right\}$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x) = \lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = c.$

Exercice 10 Calcul de "composition" de limites :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to -\infty} (x+3) & = & -\infty \\ \lim\limits_{X\to -\infty} e^X & = & 0 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x+3} = 0$.
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to +\infty} (2x+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln X & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(2x+1) = +\infty$.
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0} (x+4) & = & 4 \\ \lim\limits_{X\to 4} \sqrt{X} & = & 2 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+4} = 2$.

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

Dans ce cas, toutes les situations sont *a priori* possibles : existence d'une limite finie, nulle ou non ; existence d'une limite infinie ; absence de limite.

Les quatre cas d'indétermination des limites sont :

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	Limite indéterminée	type d'indétermination
$+\infty$	$-\infty$	$f(x)+g(x)$	$\infty-\infty$
0	$\pm\infty$	$f(x)\times g(x)$	$0\times\infty$
0	0	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{0}{0}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$

Exercice 11 Indétermination du type « $\infty - \infty$ », par exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2 - x)$

En effet, $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x & = & +\infty \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2-x)$ est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$.

Le terme prépondérant est x^2 que l'on met donc en facteur : $f(x) = 3x^2 - x = x^2\left(3 - \dfrac{1}{x}\right)$.

$$\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x}\right) & = & 1 \end{array}\right\} \text{ d'où } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Remarques : *De manière générale, le comportement d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$ est dicté par le comportement de son terme de plus haut degré en $\pm\infty$.*

De manière tout aussi générale, pour lever l'indétermination dans une somme ou soustraction de termes, on factorise par le terme prépondérant (le terme de plus haut degré dans une expression polynômiale...)

Exercice 12 Indétermination du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » :

— $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2x+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2-3) & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2-3}\right)$ est une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

— Pour $x \neq 0$, on factorise par la puissance de x maximale et on simplifie :

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{2x^2-3} = \frac{x^2\left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2 - \dfrac{3}{x^2}\right)} = \frac{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{2 - \dfrac{3}{x^2}}.$$

— $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) & = & 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{3}{x^2}\right) & = & 2 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Remarque : *De manière générale, le comportement d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ est dictée par le comportement du quotient des deux termes de plus haut degré.*

Exercice 13 Indétermination du type « $0 \times \infty$ » :

— $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1) & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{1}{x}(x^2+1)\right]$ est une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ».

— On développe : $f(x) = \dfrac{1}{x}(x^2+1) = x + \dfrac{1}{x}$.

— $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to+\infty} x & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^+ \end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 14 Indétermination du type « $\dfrac{0}{0}$ » :

— $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to1} (x^2-1) & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to1} (x-1) & = & 0 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.

— On factorise : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$.

— $\lim\limits_{x\to1} (x-1) = 0$ donc : $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$.

2.5 Croissance comparée de l'exponentielle, du logarithme et des fonctions puissance

Propriété *Pour tout nombre réel* $\alpha > 0$: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ *et,* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$,

En particulier, pour $\alpha = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, *et* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

L'idée à retenir : En $+\infty$, on a l'ordre de prépondérance : " $\ln x \ll x^\alpha \ll e^x$ "

Corollaire *Pour tout* $\alpha > 0$, $\lim_{x\to0} x^\alpha \ln x = 0$ *et* $\lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$.

En particulier, pour $\alpha = 1$, $\lim_{x\to0} x\ln x = 0$ *et* $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

3 Dérivation

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, C sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts de I

3.1 Nombre dérivé en un point

On souhaite trouver une fonction affine (droite) qui réalise une bonne approximation de la fonction f au voisinage d'un point d'une courbe.

Exercice 15 Pour h voisin de 0, on a :

— $(1+h)^2 = 1+2h+h^2$ donc, quand h tend vers 0 : $(1+h)^2 \approx 1+2h$.

— $(1+h)^3 = 1+3h+3h^2+h^3$ donc, quand h tend vers 0 : $(1+h)^3 \approx 1+3h$.

— $\dfrac{1}{1+h} = 1-h+\dfrac{h^2}{1+h}$ donc, quand h tend vers 0 : $\dfrac{1}{1+h} \approx 1-h$.

Définition *Soit* f *une fonction définie en* a *et au voisinage de* a*, on dit que* f *est* *dérivable en* a *s'il existe un réel* A *est une fonction* ϵ *tels que, au voisinage de* $h=0$*, on a :*

$$f(a+h) = f(a) + Ah + h\varepsilon(h),\ \text{avec } \lim_{h\to0} \epsilon(h) = 0.$$

A *est appelé* *nombre dérivé* *de* f *en* a*, et est noté* $f'(a)$.

Exercice 16 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} f(a+h) = (a+h)^2 = a^2+2ah+h^2 &= f(a) + \quad (2a)h \quad + \quad h\times h \\ &= f(a) + \quad\ \ Ah \quad\ + \quad h\,\varepsilon(h) \end{aligned}$$

Donc, f est dérivable en a de nombre dérivé $A = 2a$: $f'(a) = 2a$.

Définition — *Le taux de variation de la fonction f entre a et x est le quotient :* $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
— *Avec $x=a+h \iff x-a=h$, ce quotient s'écrit aussi :* $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
— *f est dérivable en a et on note cette dérivée $f'(a)$ si la limite suivante existe :*

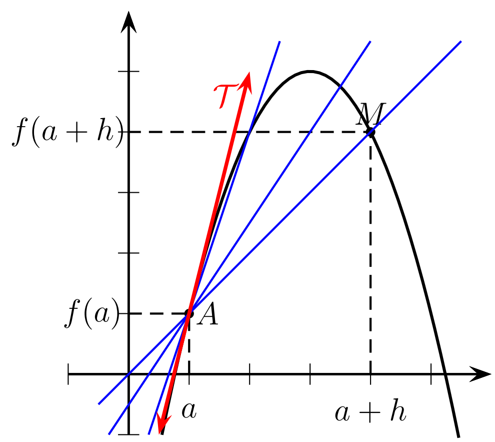
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Exercice 17 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
— le taux de variation de f entre a et $a+h$ est :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h.$$

— donc, $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}(2a+h)=2a$.
— En particulier, $f'(3)=6$, $f'(0)=0$ ...

Interprétation graphique :
Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche du point A.
Ainsi, la droite (AM) se rapproche de la tangente $\mathcal{T}$ au point A
$f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse a.



3.2 Fonction dérivée

Définition *Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelé fonction dérivée de f sur I.*

On obtient le tableau de dérivation suivant :

Fonction f	Fonction f'	Ensemble de définition de f
k	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha\in\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{R}^*$ si $\alpha\in\mathbb{Z}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha\in\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Exercice 18 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

• $f(x)=3x-2$ • $f(x)=x^3$ • $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ • $f(x)=x^{4321}$

3.3 Opérations

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication par un nombre	$k\times u$ avec $k\in\mathbb{R}$	$k\times u'$
Multiplication	$u\times v$	$u'\times v+u\times v'$
Puissance	u^n	$n\times u'\times u^{n-1}$
Division	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
Inverse	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
Fonction composée	$f\circ g$	$f'\circ g\times g'$
exponentielle	e^u	$u'\ e^u$
logarithme	$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$
sinus	$\sin(u)$	$u'\ \cos(u)$
cosinus	$\cos(u)$	$-u'\ \sin(u)$

Exercice 19 Calcul de dérivées :

- $f(x)=x^3+x+3$: On utilise la formule $(u+v)'=u'+v'$ avec $u(x)=x^3$ et $v(x)=x+3$.
  On obtient $f'(x)=3x^2+1$.
- $f(x)=3(x^2+4)$: on utilise la formule $(ku)'=ku'$ avec $k=3$ et $u(x)=x^2+4$.
  On obtient $f'(x)=6x$.
- $f(x)=(-2x+3)(5x-3)$: On utilise la formule $(uv)'=u'v+uv'$ avec $u(x)=-2x+3$ et $v(x)=5x-3$.
  On obtient $f'(x)=-20x+21$.
- $f(x)=(2x-7)^2$: on utilise la formule $(u^2)'=2uu'$ avec $u(x)=2x-7$.
  on obtient $f'(x)=4(2x-7)$.
- $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^2+3}$: On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x)=3x-4$ et $v(x)=x^2+3$.
  on obtient $f'(x)=\dfrac{-3x^2+8x+9}{(x^2+3)^2}$.
- $f(x)=\dfrac{1}{-3x+1}$: On utilise la formule $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v(x)=-3x+1$.
  on obtient $f'(x)=\dfrac{3}{(-3x+1)^2}$.
- $f(x)=e^{3x+1}$: On utilise la formule $(e^u)'=u'\ e^u$ avec $u(x)=3x+1$.
  on obtient $f'(x)=3\ e^{3x+1}$.
- $f(x)=ln(-2x+5)$: On utilise la formule $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=-2x+5$.
  on obtient $f'(x)=\dfrac{-2}{-2x+5}$.
- $f(x)=\cos(2x+1)$: On utilise la formule $\cos'(u)=-u'\sin(u)$ avec $u(x)=2x+1$.
  on obtient $f'(x)=-2\sin(2x+1)$.

3.4 Dérivées successives

Définition *Soit f une fonction dérivable. Lorsque cela est possible, on définit les* *<u>dérivées successives</u>* *de f notées :*

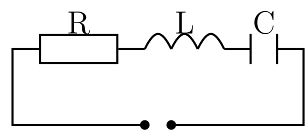
$$f' \quad , \quad f'' \quad , \quad f''' \quad , \quad f^{(4)} \quad , \quad \dots \quad , \quad f^{(n)}.$$

Exercice 20 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$, alors

• $f'(x) = \dots$ • $f''(x) = \dots$ • $f'''(x) = \dots$ • $f^{(4)} = \dots$ • $f^{(5)} = \dots$ • $f^{(107)} = \dots$

En physique et en mécanique, on utilise la notation différentielle : $\dfrac{df}{dx} = f'$ et $\dfrac{d^2f}{dx^2} = f''$

Exercice 21 Dans un circuit R, L, C en série, on a :
- $i = \dfrac{dq}{dt}$.
- $e = -L\dfrac{di}{dt}$.
- donc : $e = -L\dfrac{d^2q}{dt^2}$.



Si par exemple, $q = 5\cos(t)$, alors $i = -5\sin(t)$ et $e = -5L\cos(t)$.

3.5 Équation de la tangente

Propriété *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$. La* *<u>tangente</u>* *$\mathcal{T}_a$ en a à la courbe $\mathcal{C}_f$ a pour équation :*

$$\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exercice 22 Soit $f(x) = x^2 + 2$. Les équations des tangentes T_0 en 0 et T_{-1} en -1 sont :
- $f'(x) = 2x$
- $f'(0) = 0$ donc $T_0 : y = 0 \times (x - 0) + f(0) = 2$.
- $f'(-1) = -2$ donc $T_{-1} : y = -2 \times (x + 1) + f(-1) = -2x + 1$.

4 Étude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

Le nombre dérivé $f'(x)$ de la fonction en x est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x.

Ainsi, si ce coefficient directeur $f'(x)$ est positif, la tangente est une droite croissante, donc la courbe et la fonction aussi, "au voisinage de x".

Si $f'(x)$ est négatif, la fonction est donc décroissante au voisinage de x.

Plus précisément :

Propriété *On suppose que f est dérivable sur I.*

- *f est croissante sur $I \iff f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.*
- *f est décroissante sur $I \iff f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.*
- *f est constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.*

Il est donc possible de déterminer les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

Exercice 23 Étude d'une fonction polynôme : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$.

Pour tout réel x on a $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$.

On détermine le signe du trinôme du 2^{nd} degré $x^2 - x - 2$ en cherchant ses racines et on trouve -1 et 2.

On connaît alors le signe de la dérivée et on en déduit immédiatement les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f			6				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-21		

f est croissante sur $]-\infty\,;-1\,]$ et sur $[\,2\,;+\infty\,[$ et décroissante sur $[\,-1\,;\,2\,]$.

Exercice 24 Etude d'une fonction logarithme : $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$.

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = 4x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2-1}{x} = \dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x}$.

Le trinôme du second degré du numérateur $4x^2 - 1$ admet 2 racines $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2-1$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			$\frac{3}{2} + \ln 2$		

Exercice 25 Etude d'une fonction exponentielle : $h(x) = (x+2)\,e^{-x}$.

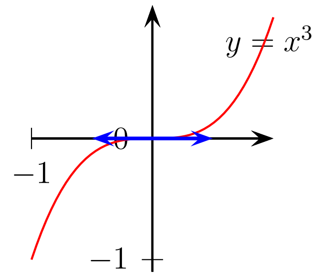
h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x on a $h'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x}) = (1 - x - 2)\,e^{-x} = (-x-1)\,e^{-x}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	—	$-$	
e^{-x}		$+$	—	$+$	
signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de h			e		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				0

4.2 Extremum d'une fonction

Propriété *f est une fonction dérivable sur l'intervalle I.*
Si f admet un extremum (minimum ou maximum) en a distinct des extrémités de I, alors $f'(a) = 0$.

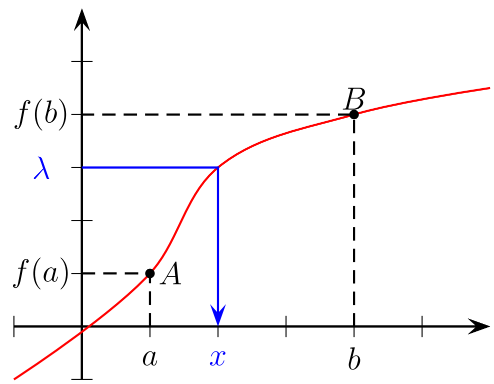


Remarque : *Attention, la réciproque n'est pas vraie : le fait que $f'(a) = 0$ n'implique pas forcément qu'il existe un extremum en a.*

Exercice 26 La fonction $f(x) = x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2$ donc, $f'(0) = 0$ mais f n'admet ni minimum, ni maximum en 0.

Remarque : *La tangente à la courbe en un point a où $f'(a) = 0$ est parallèle à l'axe des abscisses.*

4.3 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$



Propriété *Si f est une fonction continue, dérivable et strictement croissante [resp. décroissante] sur un intervalle $[\,a;b\,]$ alors, pour tout $\lambda \in [\,f(a);f(b)\,]$ [resp. $[\,f(b);f(a)\,]$], l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique sur l'intervalle $[\,a;b\,]$.*

Exercice 27 Soit $f(x) = x^3 + x + 1 = 0$. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$ à 10^{-1} près.

— f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 1$.
— f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
— on calcule $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$.
— D'après le théorème, $0 \in [\,f(-1);f(0)\,] = [\,-1;1\,]$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique dans l'intervalle $[-1;1\,]$.
— A la calculatrice, on trouve $f(-0,7) = -0,043 < 0$ et $f(-0,6) = 0,184 > 0$.
— La racine vaut donc $-0,7$ à 10^{-1} près.