Séries de Fourier - Calculs fondamentaux

I - Série de Fourier associée à une fonction f

La série de Fourier associée à une fonction f, périodique de période T, s'écrit :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

où la pulsation ω est reliée à la période T par la relation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Déterminer la décomposition de la fonction f en série de Fourier revient à déterminer les coefficients a_0 (valeur moyenne de f), et pour $n \geqslant 1$, a_n et b_n, donnés par :

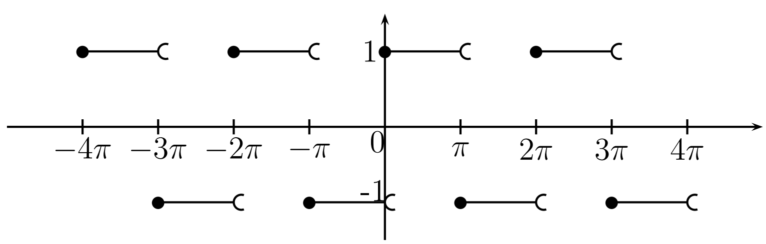
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos\left(n\omega T\right)\,dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin\left(n\omega T\right)\,dt \end{aligned}$$

pour un réel α quelconque.

1) 1^er^ exemple complet

Soit la fonction f périodique de période 2π définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < \pi \\ -1 & \text{si} \quad \pi \leqslant t < 2\pi \end{cases}$$



Représentation graphique de la fonction f

Calcul des coefficients de la série de Fourier : La période de f est $T = 2\pi$, soit une pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1$.

a) Valeur moyenne de f : coefficient a_0

La valeur moyenne de f est :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi} I$$

Comme la fonction est définie par morceaux sur $[0; 2\pi]$, on décompose aussi l'intégrale I en 2 morceaux (relation de Chasles pour les intégrales) :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi f(t)\,dt + \int_\pi^{2\pi} f(t)\,dt \\
&= \int_0^\pi 1\,dt + \int_\pi^{2\pi} (-1)\,dt \\
&= \int_0^\pi 1\,dt - \int_\pi^{2\pi} 1\,dt \\
&= \Big[\, t \,\Big]_0^\pi - \Big[\, t \,\Big]_\pi^{2\pi} \\
&= \Big[\pi - 0\Big] - \Big[2\pi - \pi\,\Big] = \pi - \pi = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \times 0 = 0$.

Remarque : La fonction f étant impaire, on a directement $a_0 = 0$, résultat que l'on retrouve ici...

b) Coefficients a_n

Pour les autres coefficients :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi} I_n$$

On procède de la même façon pour calculer I_n :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{2\pi} f(t)\,\cos(nt)\,dt \\
&= \int_0^\pi f(t)\,\cos(nt)\,dt + \int_\pi^{2\pi} f(t)\,\cos(nt)\,dt \\
&= \int_0^\pi 1\,\cos(nt)\,dt + \int_\pi^{2\pi} (-1)\,\cos(nt)\,dt \\
&= \int_0^\pi \cos(nt)\,dt - \int_\pi^{2\pi} \cos(nt)\,dt \\
&= \Big[\frac{1}{n}\sin(nt)\Big]_0^\pi - \Big[\frac{1}{n}\sin(nt)\Big]_\pi^{2\pi} \\
&= \frac{1}{n}\Big[\sin(n\pi) - \sin(0)\Big] - \frac{1}{n}\Big[\sin(2n\pi) - \sin(n\pi)\Big]
\end{aligned}$$

or, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sin(n\pi) = \sin(2n\pi) = 0$, d'où, $I_n = 0$, et donc $a_n = \dfrac{1}{\pi} I_n = 0$

Remarque : La fonction f étant impaire, on a aussi directement $a_n = 0$, résultat que l'on retrouve aussi ici...

c) Coefficients b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi} J_n$$

On procède de la même façon pour calculer J_n :

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^{2\pi} f(t)\,\sin(nt)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} f(t)\,\sin(nt)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\,\sin(nt)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} 1\,\sin(nt)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-1)\,\sin(nt)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(nt)\,dt \\
&= \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= -\frac{1}{n}\Big[\cos(n\pi)-\cos(0)\Big] + \frac{1}{n}\Big[\cos(2n\pi)-\cos(n\pi)\Big]
\end{aligned}$$

or, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\cos(2n\pi)=\cos(0)=1$ d'où,

$$J_n = -\frac{1}{n}\Big(\cos(n\pi)-1\Big) + \frac{1}{n}\Big(1-\cos(n\pi)\Big) = \frac{2}{n}\Big(1-\cos(n\pi)\Big)$$

et donc $b_n = \dfrac{1}{\pi}J_n = \dfrac{2}{n\pi}\Big(1-\cos(n\pi)\Big)$

d) Série de Fourier de la fonction f

La série de Fourier associée à la fonction f s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}
S(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0\times\cos(nt) + \frac{2}{n\pi}\Big(1-\cos(n\pi)\Big)\sin(nt) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\Big(1-\cos(n\pi)\Big)\sin(nt)
\end{aligned}$$

e) Remarque sur la parité de la fonction et ses conséquences

- *en remarquant dès le début que f est impaire, les calculs peuvent s'effectuer plus rapidement et simplement en employant les formules adaptées des coefficients a_0 et a_n (alors directement égaux à 0, sans calculs), et de b_n.*
  (voir le cours et l'expression des coefficients de Fourier pour une fonction paire ou impaire ; attention, ces expressions ne sont pas dans le formulaire du BTS).
- *on peut aller un peu plus loin en remarquant que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\cos(n\pi)=(-1)^n$, et ainsi que les coefficients b_n de rang pair, $n=2p+1$, sont nuls et que ceux de rang impair valent plus simplement $b_{2p+1}=\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{2p+1}$.*
  La série de Fourier s'écrit alors :

$$S(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}\sin((2p+1)t)$$

II - Les calculs incontournables

Le calcul des coefficients de Fourier d'une fonction quelconque f se ramène généralement (du moins pour le programme du BTS) aux calculs suivants (à des coefficients multiplicatifs près) :

$$I_n = \int_a^b \cos(n\omega t)\,dt \quad \text{et, } J_n = \int_a^b \sin(n\omega t)\,dt$$

et

$$U_n = \int_a^b t\,\cos(n\omega t)\,dt \quad \text{et, } V_n = \int_a^b t\,\sin(n\omega t)\,dt$$

ainsi que (plus rarement, mais à savoir calculer néanmoins)

$$Y_n = \int_a^b t^2\,\cos(n\omega t)\,dt \quad \text{et, } Z_n = \int_a^b t^2\,\sin(n\omega t)\,dt$$

Bien évidemment, ces calculs ne sont pas à connaître par cœur, par contre il faut savoir les effectuer sans hésiter !

1) Calculs de I_n et J_n

$$I_n = \int_a^b \cos(n\omega t)\,dt \quad \text{et, } J_n = \int_a^b \sin(n\omega t)\,dt$$

Ces calculs ont déjà été effectués lors des calculs des coefficients de Fourier du 1[er] exemple.

On connaît ici directement des primitives de $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$:

$$I_n = \int_a^b \cos(n\omega t)\,dt = \left[\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_a^b = \frac{1}{n\omega}\Big[\sin(n\omega t)\Big]_a^b = \frac{1}{n\omega}\Big[\sin(n\omega b) - \sin(n\omega a)\Big]$$

$$I_n = \int_a^b \sin(n\omega t)\,dt = \left[-\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_0^\pi = -\frac{1}{n\omega}\Big[\cos(n\omega t)\Big]_a^b = -\frac{1}{n\omega}\Big[\cos(n\omega b) - \cos(n\omega a)\Big]$$

Exemple : Calculer, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3nt)\;dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3nt)\;dt\ .$$

Correction : Une primitive de $\cos(3nt)$ est $\dfrac{1}{3n}\sin(3nt)$, et donc

$$I_n = \left[\ \frac{1}{3n}\sin(3nt)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3n}\left[\ \sin(3nt)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3n}\left(\sin\left(3n\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right) = \frac{1}{3n}\sin\left(3n\frac{\pi}{2}\right)$$

car $\sin(0) = 0$.

De même, une primitive de $\sin(3nt)$ est $\dfrac{-1}{3n}\cos(3nt)$, et donc

$$J_n = \left[\ \frac{-1}{3n}\cos(3nt)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{3n}\left[\ \cos(3nt)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{3n}\left(\cos\left(3n\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right) = \frac{-1}{3n}\left(\cos\left(3n\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)$$

car $\cos(0) = 1$.

2) Calculs de U_n et V_n

$$U_n=\int_a^b t\,\cos(n\omega t)\,dt \quad \text{et, } V_n=\int_a^b t\,\sin(n\omega t)\,dt$$

On peut ici (et doit...) utiliser une intégration par parties, dont on rappelle la formule générale :

$$\int_a^b u\,v'=\Big[\,u\,v\,\Big]_a^b-\int_a^b u'\,v$$

L'idée est de dériver le "t" dans les intégrales U_n et V_n afin de se retrouver avec des intégrales plus simples du type de I_n et J_n.

a) Calcul de U_n

On intègre donc par parties U_n : $U_n=\displaystyle\int_a^b t\,\cos(n\omega t)\,dt=\int_a^b u\,v'$

avec $\left\{\begin{array}{l} u(t)=t \\ v'(t)=\cos(n\omega t)\end{array}\right.$ soit, $\left\{\begin{array}{l} u'(t)=1 \\ v(t)=\dfrac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\end{array}\right.$

et ainsi,

$$\begin{aligned}
U_n &= \int_a^b t\,\cos(n\omega t)\,dt=\int_a^b u\,v' \\
&= \Big[\,u\,v\,\Big]_a^b-\int_a^b u'\,v \\
&= \Big[\,t\frac{1}{n\omega}\,\sin(n\omega t)\,\Big]_a^b-\int_a^b 1\,\frac{1}{n\omega}\,\sin(n\omega t)\,dt \\
&= \frac{1}{n\omega}\Big[\,t\,\sin(n\omega t)\,\Big]_a^b-\frac{1}{n\omega}\int_a^b \sin(n\omega t)\,dt
\end{aligned}$$

et il n'y a plus qu'à calculer la dernière intégrale qui n'est autre que J_n dont le calcul est détaillé dans le paragraphe précédent.

<u>**Exemple :**</u> Calculer, pour tout entier $n\geqslant 1$, $\quad U_n=\displaystyle\int_0^\pi t\cos(nt)\,dt$.

<u>**Correction :**</u> On intègre U_n par partie, en posant $\left\{\begin{array}{l} u(t)=t \\ v'(t)=\cos(nt)\end{array}\right.$ soit, $\left\{\begin{array}{l} u'(t)=1 \\ v(t)=\dfrac{1}{n}\sin(nt)\end{array}\right.$

$$\begin{aligned}
U_n &= \int_0^\pi u\,v'=\Big[\,u\,v\,\Big]_0^\pi-\int_0^\pi u'\,v \\
&= \Big[\,t\frac{1}{n}\sin(nt)\,\Big]_0^\pi-\int_0^\pi 1\times\frac{1}{n}\sin(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{n}\Big(\sin(n\pi)-\sin(0)\Big)-\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\,dt
\end{aligned}$$

or, $\sin(n\pi)=\sin(0)=0$, et une primitive de $\sin(nt)$ est $-\dfrac{1}{n}\cos(nt)$, d'où,

$$U_n=-\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\,dt=-\frac{1}{n}\Big[\,-\frac{1}{n}\cos(nt)\,\Big]_0^\pi=\frac{1}{n^2}\Big(\cos(n\pi)-\cos(0)\Big)=\frac{1}{n^2}\Big(\cos(n\pi)-1\Big)$$

car $\cos(0) = 1$.

On pourrait aller un peu plus loin en remarquant que $\cos(n\pi) = 1$ *si* n *est pair, et* $\cos(n\pi) = -1$ *si* n *est impair, et donc, en résumé,* $\cos(n\pi) = (-1)^n$*, d'où* $U_n = \dfrac{1}{n^2}\Big((-1)^n - 1\Big)$.

b) Calcul de V_n

De même pour V_n, on intègre donc par parties : $V_n = \displaystyle\int_a^b t\,\sin(n\omega t)\,dt = \int_a^b u\,v'$

avec $\left\{\begin{array}{l} u(t) = t \\ \\ v'(t) = \sin(n\omega t)\end{array}\right.$ soit, $\left\{\begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ \\ v(t) = \dfrac{-1}{n\omega}\cos(n\omega t)\end{array}\right.$ et ainsi,

$$\begin{aligned} U_n &= \int_a^b t\,\sin(n\omega t)\,dt = \int_a^b u\,v' \\ &= \Big[\,u\,v\,\Big]_a^b - \int_a^b u'\,v \\ &= \Big[\,-t\frac{1}{n\omega}\,\cos(n\omega t)\,\Big]_a^b - \int_a^b 1\,\frac{-1}{n\omega}\,\cos(n\omega t)\,dt \\ &= -\frac{1}{n\omega}\Big[\,t\,\cos(n\omega t)\,\Big]_a^b + \frac{1}{n\omega}\int_a^b \cos(n\omega t)\,dt \end{aligned}$$

et il n'y a plus qu'à calculer la dernière intégrale qui n'est autre que I_n dont le calcul est détaillé dans le paragraphe précédent.

<u>**Exemple :**</u> Calculer, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad U_n = \displaystyle\int_0^\pi t\sin(nt)\,dt$.

<u>**Correction :**</u> On intègre U_n par partie, en posant $\left\{\begin{array}{l} u(t) = t \\ \\ v'(t) = \sin(nt)\end{array}\right.$ soit, $\left\{\begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ \\ v(t) = -\dfrac{1}{n}\cos(nt)\end{array}\right.$

$$\begin{aligned} U_n &= \int_0^\pi u\,v' = \Big[\,u\,v\,\Big]_0^\pi - \int_0^\pi u'\,v \\ &= \Big[\,t\frac{-1}{n}\cos(nt)\,\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 1\times\frac{-1}{n}\cos(nt)\,dt \\ &= -\frac{1}{n}\Big(\cos(n\pi) - \cos(0)\Big) + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nt)\,dt \end{aligned}$$

or, $\cos(0) = 1$, et une primitive de $\cos(nt)$ est $\dfrac{1}{n}\sin(nt)$, d'où,

$$U_n = -\frac{1}{n}\Big(\cos(n\pi)-1\Big)+\frac{1}{n}\Big[\,\frac{1}{n}\sin(nt)\,\Big]_0^\pi = -\frac{1}{n}\Big(\cos(n\pi)-1\Big)+\frac{1}{n^2}\Big(\sin(n\pi)-\sin(0)\Big) = -\frac{1}{n}\Big(\cos(n\pi)-1\Big)$$

car $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0$.

3) Calculs de Y_n et Z_n

Pour le calcul de Y_n et Z_n,

$$Y_n = \int_a^b t^2\,\cos(n\omega t)\,dt \quad \text{et, } Z_n = \int_a^b t^2\,\sin(n\omega t)\,dt$$

on utilise une double intégration par parties (c'est-à-dire deux intégrations par parties successives, l'une après l'autre) :

$$Y_n = \int_a^b t^2 \cos(n\omega t)\,dt = \int_a^b u\,v'$$

avec $\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = \cos(n\omega t) \end{cases}$ soit, $\begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = \dfrac{1}{n\omega}\sin(n\omega t) \end{cases}$

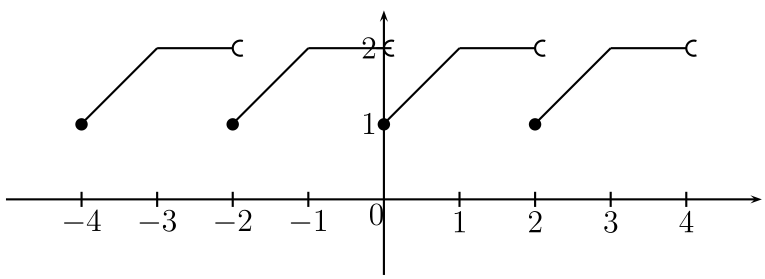
et ainsi,

$$\begin{aligned} Y_n &= \int_a^b t^2 \cos(n\omega t)\,dt = \int_a^b u\,v' \\ &= \Big[\,u\,v\,\Big]_a^b - \int_a^b u'\,v \\ &= \Big[\,t^2\,\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\Big]_a^b - \int_a^b 2t\,\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\,dt \\ &= \frac{1}{n\omega}\Big[\,t^2\,\sin(n\omega t)\Big]_a^b - \frac{2}{n\omega}\int_a^b t\,\sin(n\omega t)\,dt \end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à calculer la dernière intégrale qui n'est autre que V_n, calculée dans le paragraphe précédent.

III - $2^{\text{ème}}$ exemple complet

Soit la fonction f, périodique de période 2, définie par $f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 \leqslant t < 2 \end{cases}$



Représentation graphique de la fonction f

a) Calcul de la valeur moyenne de f : coefficient a_0

La valeur moyenne de f est :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,dt = \frac{1}{2}I$$

avec,

$$\begin{array}{rcll}
I & = & \displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt & \\
 & = & \displaystyle\int_0^1 (t+1)\,dt & +\displaystyle\int_1^2 2\,dt \\
 & = & \left[\,\dfrac{1}{2}(t+1)^2\,\right]_0^1 & +\Big[2t\Big]_1^2 \\
 & = & \dfrac{1}{2}\Big[\,2^2-1^2\,\Big] & +2\Big[2-1\Big] \\
 & = & \dfrac{1}{2}\Big[\,3\,\Big] & +2\Big[1\Big] \\
 & = & \dfrac{7}{2} &
\end{array}$$

ainsi, $a_0 = \dfrac{1}{2}I = \dfrac{7}{4}$.

b) Calcul des coefficients a_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\cos(n\omega t)\,dt$$

avec la période $T=2$ et donc la pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$,

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\,\cos(n\pi t)\,dt = \int_0^2 f(t)\,\cos(n\pi t)\,dt$$

On décompose l'intégrale en utilisant la définition par morceaux de f :

$$\begin{array}{rcll}
a_n & = & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\cos(n\pi t)\,dt & +\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\cos(n\pi t)\,dt \\
 & = & \displaystyle\int_0^1 (t+1)\,\cos(n\pi t)\,dt & +\displaystyle\int_1^2 2\,\cos(n\pi t)\,dt \\
 & = & \displaystyle\int_0^1 (t+1)\,\cos(n\pi t)\,dt & +2\displaystyle\int_1^2 \cos(n\pi t)\,dt \\
 & = & A_n & +\ 2\ B_n
\end{array}$$

L'intégrale A_n se calcule en utilisant une intégration par parties (cf. calcul de l'intégrale U_n), tandis que B_n s'intègre directement en utilisant une primitive de $\cos(n\pi t)$ (cf. calcul de l'intégrale I_n) :

$$\begin{array}{rcll}
A_n & = & \left[(t+1)\dfrac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]_0^1 & -\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\,dt \\
 & = & \dfrac{1}{n\pi}\Big[(t+1)\sin(n\pi t)\Big]_0^1 & -\dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_0^1 \sin(n\pi t)\,dt \\
 & = & \dfrac{1}{n\pi}\Big[2\sin(n\pi)-\sin(0)\Big] & -\dfrac{1}{n\pi}\left[\dfrac{-1}{n\pi}\cos(n\pi t)\right]_0^1 \\
 & = & \dfrac{1}{n\pi}\Big[0-0\Big] & +\dfrac{1}{n^2\pi^2}\Big[\cos(n\pi)-\cos(0)\Big]
\end{array}$$

or, pour tout entier n, $\cos(n\pi)=(-1)^n$, d'où $A_n=\dfrac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}$.

$$B_n \;=\; \int_1^2 \cos(n\pi t)\,dt=\left[\ \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\ \right]_1^2=\frac{1}{n\pi}\Big[\sin(2n\pi)-\sin(n\pi)\Big]=0$$

car, pour tout entier n, $\sin(2n\pi)=\sin(n\pi)=0$.

Au final,

$$a_n=A_n+2B_n=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}$$

c) Calcul des coefficients b_n

De même que pour les coefficients a_n,

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\,\sin(n\pi t)\,dt=\int_0^2 f(t)\,\sin(n\pi t)\,dt$$

On décompose l'intégrale en utilisant la définition par morceaux de f :

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_0^1 f(t)\,\sin(n\pi t)\,dt &&+\int_1^2 f(t)\,\sin(n\pi t)\,dt\\
&= \int_0^1 (t+1)\,\sin(n\pi t)\,dt &&+\int_1^2 2\,\sin(n\pi t)\,dt\\
&= \int_0^1 (t+1)\,\sin(n\pi t)\,dt &&+2\int_1^2 \sin(n\pi t)\,dt\\
&= C_n &&+\,2\ D_n
\end{aligned}$$

L'intégrale C_n se calcule en utilisant une intégration par parties (cf. calcul de l'intégrale V_n), tandis que D_n s'intègre directement en utilisant une primitive de $\sin(n\pi t)$ (cf. calcul de l'intégrale J_n) :

$$\begin{aligned}
C_n &= \left[(t+1)\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi t)\right]_0^1 &&-\int_0^1 \frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi t)\,dt\\
&= \frac{-1}{n\pi}\Big[(t+1)\cos(n\pi t)\Big]_0^1 &&+\frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi t)\,dt\\
&= \frac{-1}{n\pi}\Big[2\cos(n\pi)-\cos(0)\Big] &&+\frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]_0^1\\
&= \frac{-1}{n\pi}\Big[2\cos(n\pi)-1\Big] &&+\frac{1}{n^2\pi^2}\Big[\sin(n\pi)-\sin(0)\Big]
\end{aligned}$$

or, pour tout entier n, $\sin(n\pi)=\sin(0)=0$, d'où $C_n=\dfrac{-1}{n^2\pi^2}\left(2\cos(n\pi)-1\right)=\dfrac{1-2(-1)^n}{n^2\pi^2}$.

$$D_n \;=\; \int_1^2 \sin(n\pi t)\,dt=\left[\ \frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi t)\ \right]_1^2=\frac{-1}{n\pi}\Big[\cos(2n\pi)-\cos(n\pi)\Big]=\frac{(-1)^n-1}{n\pi}$$

.

Au final,

$$b_n=C_n+2D_n=\frac{1-2(-1)^n}{n^2\pi^2}-2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

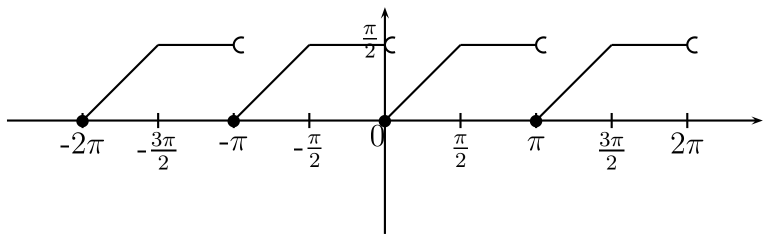
IV - Exercice

Soit la fonction f, π-périodique, définie par $f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$

1. Donner la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.
2. Détermination de la décomposition en série de Fourier de f :
   a. Calculer la valeur moyenne a_0 de f.
   b. Calculer les coefficients a_n, $n \geqslant 1$.
   c. Calculer les coefficients b_n, $n \geqslant 1$.
3. Calculer la valeur efficace de f.

Correction :

1. On représente d'abord f sur $[0; \pi]$ à l'aide de la définition par morceaux de f, puis on complète par périodicité sur $[-2\pi; 0]$ et sur $[\pi; 2\pi]$:



Représentation graphique de la fonction f

2. La période de f est $T = \pi$, et sa pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2$.
   a.
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt = \frac{1}{\pi} I$$
   avec
$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\pi}{2}\,dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\Big[\,t\,\Big]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= \left(\frac{\pi^2}{8} - 0\right) + \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi^2}{8} \end{aligned}$$
   Ainsi, $a_0 = \dfrac{1}{\pi} I$, soit $\boxed{a_0 = \dfrac{3\pi}{8}}$.

   b. Pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\cos(n\omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,\cos(2nt)\,dt = \frac{1}{\pi} J$$
   avec,
$$J = \int_0^\pi f(t)\,\cos(2nt)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,cos(2nt)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\pi}{2}\,\cos(2nt)\,dt$$

La première intégrale se calcule en utilisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,cos(2nt)\,dt &= \left[t\frac{1}{2n}\sin(2nt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n}\sin(2nt)\,dt \\
&= \frac{1}{2n}\left[\frac{\pi}{2}\sin\left(2n\frac{\pi}{2}\right) - 0\right] - \frac{1}{2n}\left[\frac{-1}{2n}\cos(2nt)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{4n}\sin(n\pi) + \frac{1}{4n^2}\Big[\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)\Big]
\end{aligned}$$

or, pour tout entier n, $\sin(n\pi) = 0$, et $\cos(2n\pi) = 1$,

et ainsi, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,cos(2nt)\,dt = \frac{1}{4n^2}\left(1 - \cos(n\pi)\right)$

Par ailleurs,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\cos(2nt)\,dt = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2n}\sin(2nt)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4n}\Big[\sin(2n\pi) - \sin(n\pi\Big] = 0$$

car, pour tout entier n, $\sin(2n\pi) = \sin(n\pi) = 0$.

Au final, $a_n = \dfrac{1}{\pi}J = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{4n^2}\left(1 - \cos(n\pi)\right)$, soit $\boxed{a_n = \dfrac{1}{4\pi n^2}\left(1 - \cos(n\pi)\right)}$.

c. De même que précédemment,

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\sin(n\omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\sin(2nt)\,dt$$

avec,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(t)\,\sin(2nt)\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin(2nt)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\sin(2nt)\,dt \\
&= \left[t\frac{-1}{2n}\cos(2nt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{2n}\cos(2nt)\,dt + \frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{2n}\cos(2nt)\right]_{\frac{pi}{2}}^{\pi} \\
&= \left[\frac{-\pi}{4n}\cos(n\pi) - 0\right] + \frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2n}\sin(2nt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4n}\Big[\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)\Big] \\
&= \frac{-\pi}{4n}\cos(n\pi) + 0 - \frac{\pi}{4n}\left(1 - \cos(n\pi)\right) = -\frac{\pi}{4n}
\end{aligned}$$

car, $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0$, et $\cos(2n\pi) = 1$.

Au final, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{-\pi}{4n}$, soit $\boxed{b_n = -\dfrac{1}{4n}}$.

3. La valeur efficace μ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mu^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(f(t)\right)^2\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\ \frac{t^3}{3}\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi^2}{4}\Big[\ t\ \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\ \frac{\pi^3}{24} - 0\ \right] + \frac{\pi^2}{4}\left[\ \pi - \frac{\pi}{2}\right]\right) = \frac{\pi^2}{24}
\end{aligned}$$

Ainsi, la valeur efficace de f est $\boxed{\mu = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{24}} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{6}}}$.