Limites de suites - Exercices

Exercice 1 Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + n - 1$.

1. Donner u_0, u_1 et u_2.
2. Exprimer en fonction de n : a) u_{n-1} b) u_{n+1} c) $u_{n+1} - u_n$
3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?
4. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

Exercice 2 Préciser si les suites suivantes (u_n) sont arithmétiques, géométriques, ou ni l'un ni l'autre.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

b. $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 5$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2n^2 + 5n + 3}{n + 1}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{3^{2n+1}}{2n}$.

e. $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n + 4$.

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que $u_n = f(n)$.
2. Etudier le sens de variation de f et en déduire celui de (u_n).
3. Calculer u_{10}, u_{100}, $u_{10\,000}$, u_{10^8} et $u_{10^{16}}$.
   Que peut-on dire des valeurs de u_n lorsque n devient de plus en plus grand ?

Exercice 4 Même exercice avec les suites (u_n) définies pour tout entier naturel n par

1) $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$. 2) $u_n = 3n^2 + 4n - 5$. 3) $u_n = -n^3 + 6n^2 - 9n + 5$.

Exercice 5 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + 1$.
Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Tracer $\mathcal{C}_f$ et placer u_0, u_1, …, u_4 sur l'axe des abscisses.

Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$ ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

b) Construire sur le graphique précédent les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses repsectives u_0, u_1 et u_2.

c) Conjecturer le sens de variation de la suite et sa limite. *Ces résultats seront démontrés plus tard...*

Exercice 7 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3 + 2u_n}$.

Pour tout entier n, on pose $v_n = \dfrac{3}{u_n}$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
2. En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction n.

Exercice 8 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - \dfrac{1}{6}$.

Pour tout entier n, on pose $v_n = 2u_n + 1$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction n.

Exercice 9 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
Montrer que, pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 10 Montrer que, pour tout $n \geq 10$, $2^n \geq 100n$.

Exercice 11 Soit la suite v définie par $v_0 = 2$, puis pour tout entier n, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{3}{2} \leq v_n \leq 2$.

Exercice 12 *Somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.*

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 13 Soit n un entier naturel non nul, et S_n la somme : $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)}$.

1. Ecrire un algorithme permettant de calculer S_n où n est un entier choisi par l'utilisateur.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $S_n = \dfrac{n}{n+1}$
3. a) Vérifier que pour tout entier p non nul, $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$

   b) Retrouver alors le résultat du 1. par une autre méthode.

Exercice 14 Soit a un réel strictement positif. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1 + na$ (inégalité de Bernoulli).

Exercice 15 Soit u la suite définie par $u_0 = 3$, et pour tout entier n par $u_{n+1} = 2(u_n - 1)$.
Calculer les premiers termes de cette suite, et conjecturer une expression de u_n.
Démontrer alors cette conjecture.

Exercice 16 Soit la suite u définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$.
Démontrer que cette suite est monotone.

Exercice 17 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = n^3 + \dfrac{1}{n}$ b) $u_n = (3n+1)(-7n+5)$ c) $u_n = \dfrac{3 - \frac{4}{n}}{\frac{2}{n^2}}$ d) $u_n = n^3 - n^2 + 3n - 1$

e) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{-n^2+6}$ f) $u_n = \dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}$ g) $u_n = n\sqrt{n} - n$ h) $u_n = (-2n+3)\dfrac{n+3}{-n^2+n+6}$

i) $u_n = \dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$ j) $u_n = \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)}$ k) $u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{(2n+1)^2}$ l) $u_n = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2n^2+3}{3n^2+n+1}$

Exercice 18 *D'après BAC*
(u_n) est une suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

a. Etudier le sens de variation de (u_n).

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, $u_n = (n+1)^2$.

c. En déduire que, pour tout entier n, $u_n \geqslant n^2$.

d. La suite (u_n) est-elle minorée ? majorée ? Justifier.

e. Donner la limite de (u_n).

Exercice 19 Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier n, par $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + n - 2$.

1. a) Quelle est la valeur retournée lors de l'appel *fonction(3)* de la fonction python ci-contre ?

   b) Qu'affiche l'instruction suivante ?
   for i in range(10) : print(fonction(i))

```
def fonction(n) :
  a=1
  for p in range(n) :
    a=1/3*a+p-2
  return(a)
```

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 7$, on a $a_n \geqslant n - 3$.
3. En déduire la limite de la suite (a_n).

Exercice 20 Soit la suite u définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$

1. Montrer que (u_n) est décroissante.
2. Montrer que la suite (u_n) est minorée.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 21 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

1) Montrer que cette suite est croissante.
2) Montrer que pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq 3$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3) Déterminer la limite l de la suite (u_n).

Exercice 22 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{2}x$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, puis pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Appliquer le théorème du point fixe à la suite (u_n).
2. Calculer u_0, u_1 et u_2 et conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
   Démontrer cette conjecture. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Quelle est sa limite ?

Exercice 23 Soit la suite u définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, par $u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{u_n}$.

1. a) Dans un repère orthonormal (unité graphique 4cm), tracer la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par l'expression $f(x) = 4 - \dfrac{3}{x}$.
   b) Placer sur l'axe des abscisses, et sans effectuer aucun calcul, les termes u_0, u_1, u_2 et u_3.
   c) Quelle conjecture peut-on faire sur la suite u.

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.
   b) Démontrer que la suite u est croissante, et en déduire qu'elle converge.
   c) Déterminer alors la limite de la suite u.

Exercice 24 On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$ ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.
   b) Construire sur le graphique précédent les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses repsectives u_0, u_1 et u_2.

c) Conjecturer le sens de variation de la suite et sa limite.

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, on a $u_n > 0$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite l. Déterminer l.
3. On considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Écrire un algorithme/programme qui permet de calculer S_n pour n quelconque donné.
   Calculer S_{100}.

Exercice 25 Soit (S_n) et (T_n) les deux suites définies, pour tout entier naturel n, par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n} \qquad et \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

1. a. Pour tout entier n, exprimer S_n en fonction de n.
   b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$
2. a. Montrer que la suite (T_n) est croissante.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = \dfrac{S_n + T_n}{3}$.
   c. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $T_n \leqslant 1$.
   d. En déduire que la suite (T_n) converge vers un réel l. Déterminer l.

Exercice 26 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3 + 2u_n}$.

Pour tout entier n, on pose $v_n = \dfrac{3}{u_n}$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 27

1. Soit a un réel strictement positif.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $\quad (1+a)^n \geqslant 1 + na$.
2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 > 0$ et de raison $q > 1$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 28 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 6$ et la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 8$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
2. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.
3. Déterminer les limites des suites (v_n) et (u_n).

Exercice 29 Soit la suite u définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

1$^{\text{ère}}$ **méthode** a) vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - \dfrac{16}{u_n + 3}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; 2]$.

c) Etablir la relation $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$, et en déduire le sens de variation de u.

d) Démontrer que u converge et déterminer sa limite l.

2$^{\text{ème}}$ **méthode** On considère la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\quad v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Prouver que v est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b) Exprimer pour tout n, v_n puis u_n en fontion de n.

c) En déduire la convergence de u et sa limite.