Dérivation des fonctions - Exercices

Exercice 1 Des fonctions composées

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 + 5x - 7$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + 5x - 7}$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{1}{x^3 + x^2 + 5x - 7}$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction k définie par : $k(x) = \left(x^3 + x^2 + 5x - 7\right)^2$.

Exercice 2 Comparaison de fonctions

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions :

$$f(x) = x^4 - 3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^3 - 3x - 1$$

Le but de l'exercice est de comparer ces deux fonctions.

1. On considère la fonction définie par $d(x) = f(x) - g(x)$. Déterminer l'expression de la fonction d.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction d.
3. Quel est le minimum de la fonction d sur $\mathbb{R}$? En déduire le signe de $d(x)$ pour tout x réel, et conclure.

Exercice 3 Comparer dans chaque cas les deux fonctions :

1. $f(x) = x^4$ et $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $g(x) = 1 - x$
3. $f(x) = (1+x)^3$ et $g(x) = x - 5$ (on pourra calculer $f(-3)$ et $g(-3)$).

Exercice 4

A. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 - 12x - 1$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions α, β et γ telles que :

$$-2 < \alpha < -1 \quad ; \quad -1 < \beta < 0 \quad ; \quad 1 < \gamma < 2$$

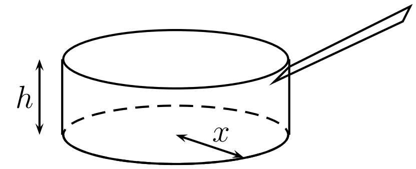
B. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^4 - 6x^2 - x - 1$.
Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

Exercice 5 Distance minimale sur une parabole

Dans un repère orthonormal d'origine O, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation : $y = x^2 - 1$.
On associe à tout nombre réel x le point M de $\mathcal{P}$ d'abscisse x.

1. Faire une figure.
2. Montrer que $OM^2 = x^4 - x^2 + 1$.
3. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - x^2 + 1$. Dresser le tableau de variation de f.

4. Déterminer la position du point M sur $\mathcal{P}$ pour laquelle la distance OM est minimale, et calculer cette distance.



Exercice 6 Des casseroles aux dimensions économiques

On peut remarquer que la hauteur d'une casserole semble être, approximativement, égale au rayon de son fond.

Le but de l'exercice est de répondre à la question suivante : *Comment fabriquer une casserole de volume V donné avec le moins de métal possible (en négligeant le manche de la casserole)*

L'unité est le cemtimètre. On note x le rayon du cercle du fond de la casserole, h sa hauteur, et $\mathcal{S}$ l'aire totale égale à l'aire latérale plus l'aire du fond.

1. Démontrer que $h = \dfrac{V}{\pi x^2}$, puis que $\mathcal{S} = \pi x^2 + \dfrac{2V}{x}$.
2. Etudier sur $]0;+\infty[$ les variations de la fonction $x \mapsto \pi x^2 + \dfrac{2V}{x}$. Conclure.

Exercice 7 Etude d'une fonction à l'aide de sa dérivée seconde

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5$.
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la dérivée de f'. *(f'' se lit "f seconde").*

1. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.
2. En déduire les variations de f'.
3. Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de $f'(x)$.
4. Etudier enfin les variations de f.

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\quad f(x) = \dfrac{2x\sqrt{x}}{1+x}$.

1. Démontrer que la fonction f est dérivable en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.
3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution a dans $[0;+\infty[$.
   b. Déterminer un encadrement à 10^{-2} près de a.

Exercice 9 Vrai ou faux. La proposition suivante est-elle vraie ?
La fonction f définie sur R par $f(x) = ax^3 + bx^2 - ax + c$ $(a \neq 0)$ n'admet aucun extremum.

Exercice 10 Quantificateurs

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\quad f(x) = x + 3 + \dfrac{2}{x}$.
Réécrire les propositions suivantes en français. Sont-elles vraies ou fausses ? (justifier).

1. $\exists x \in \mathbb{R} \ \big/\ f'(x) = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) \geqslant 0$.
3. $\exists\ I \subset \mathbb{R}$, f est décroissante sur I.
4. $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0)$ est un maximum local de f.
5. $\exists x_0 \in \mathbb{R} \ \big/\ \forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 100$.